NOÇÕES DE MATEMÁTICA

VOLUME 1

Conjuntos e Funções

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

CONJUNTOS E FUNÇÕES

Noções de Matemática

VOLUME 1

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Parte IV

Parte V

PARTE I

Capítulo 1 – **Noções de lógica**

Capítulo 2 – **Conjuntos**

Noções de lógica

1.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas *noções* de lógica, necessárias para o bom desenvolvimento do nosso curso. Essa apresentação será feita de modo simples e pouco rigoroso, pois um tratamento rigoroso exigiria não um, mas vários capítulos, o que certamente não é conveniente, uma vez que o nosso curso não pretende ser um curso de lógica e sim de matemática. Além do mais, seria pouco didático *tentar* esgotar o assunto para o principiante. Realmente, parece que o melhor modo de estudar um assunto novo é fazê-lo pelo menos em dois níveis: numa primeira abordagem, o estudo deve ser feito do modo mais intuitivo possível e vendo, o mais rápido possível, algumas aplicações; numa segunda abordagem, tenta-se ir mais a fundo.

1.2 – SENTENÇAS

Na linguagem natural encontramos vários tipos de sentenças: declarativas, interrogativas, exclamativas etc. O que distingue a sentença declarativa das outras é o fato de poder ser verdadeira ou falsa.

Exemplo

Considere as seguintes sentenças:

a) Vá tomar banho.
b) Que dia é hoje?
c) Não ponha a mão aí.
d) Todos os homens são corruptos.
e) Alguns estudantes são relaxados.
f) $4 + 3 > 9$
g) $5 < 2$
h) O Brasil não é um país da América Latina.
i) $5 + 2 = 7$ e $7 - 4 = 1$

As sentenças a, b e c não são declarativas, pois não faz sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. As outras são declarativas.

Para nós só interessarão as sentenças declarativas e, assim, daqui em diante, ao usarmos a palavra "sentença", entenda-se "sentença declarativa".

Os valores "verdadeiro" e "falso" são chamados valores de verdade (ou, "valores lógicos").

1.3 – SENTENÇAS ABERTAS

Uma *sentença aberta* é uma expressão que pode ser obtida de uma sentença, substituindo alguns (ou todos) nomes por *variáveis* (variáveis são letras do alfabeto).

Consideremos por exemplo a sentença:

"José é loiro."

Se substituirmos o nome José pela variável x obteremos a sentença aberta:

"x é loiro."

a qual não é, obviamente, verdadeira nem falsa.

Outros exemplos de sentenças abertas:

a) $x + 4 > 7$
b) $x - y = 15$
c) x é irmão de y.
d) Se x é irmão de y então x é filho de z.

É importante notar que uma sentença aberta pode ter mais de uma variável.

Exercicios Resolvidos

1.1) Das sentenças abaixo, diga quais são declarativas:

a) Bom Natal!
b) João não é irmão de Antônio.
c) Você gosta de sorvete?
d) Resolva este problema.

Solução:

a) Esta sentença está apenas expressando um desejo, não sendo, pois, verdadeira nem falsa. Assim, não é uma sentença declarativa.
b) Após uma investigação poderemos decidir se João é ou no irmão de Antônio e, portanto, poderemos classificar a sentença em verdadeira ou falsa. Assim, esta é uma sentença declarativa.
c) Esta sentença não poderá ser verdadeira nem falsa e, assim, não é declarativa.
d) Esta sentença também pode ser classificada em verdadeira ou falsa e, portanto, é declarativa.

1.2) Das expressões abaixo, diga se são sentenças declarativas ou sentenças abertas:

a) $4 + 6 = 11$
b) $x - 3 = 2$
c) $4 - x \leq 7$
d) $4 > 9$ e $5 + 2 = 1$

Solução:

São declarativas: a e d
São abertas: b e c

Exercícios Propostos

1.3) Das sentenças abaixo, diga quais são declarativas:
   a) $4 + 9 = 8$
   b) Se $4 < 2$ então $5 > 9$
   c) Onde estamos?
   d) Não é verdade que $5 + 2 = 7$
   e) Vá embora.
   f) Todos os homens são mortais.

1.4) Das expressões abaixo, diga quais são sentenças declarativas e quais são sentenças abertas:
   a) $x^2 - 5x + 6 > 0$
   b) $4x - 5 = 0$
   c) $3 + 4 = 12$
   d) Se $x = 8$ então $4 = 5$
   e) $4 > 1$ e $7 = 4$

1.4 – SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Consideremos agora uma sentença aberta de apenas uma variável. Suponhamos que ao colocarmos o nome de um elemento no lugar da variável, obtenhamos uma sentença verdadeira; diremos então que o elemento satisfaz a sentença aberta.

O conjunto de todos os elementos cujos nomes poderão ser colocados no lugar da variável será denominado **conjunto-universo**, o qual simbolizaremos por U.

O conjunto dos elementos de U que *satisfazem* a sentença aberta será chamado **conjunto-verdade** (ou **conjunto-solução**) da sentença aberta, sendo simbolizados por **V** (ou por **S**).

Exemplos

a) Seja a sentença aberta: $x^2 = 9$ e $U = \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.
   Os elementos de U que satisfazem a sentença aberta são 3 e −3. Assim, o conjunto-verdade é:

$$V = \{3; -3\}$$

b) Seja a sentença aberta $x^2 = 9$ e $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
   Neste caso, o único elemento de U que satisfaz a sentença dada é 3 e assim temos:

$$V = \{3\}$$

Os exemplos ressaltam que o conjunto-verdade de uma sentença aberta depende do conjunto-universo adotado.

1.5 – SENTENÇA ABERTA COM VÁRIAS VARIÁVEIS

Se a sentença aberta tiver duas variáveis, o conjunto-universo e o conjunto-verdade serão conjuntos de **pares ordenados**, sendo as variáveis substituídas em ordem alfabética.

Exemplo

Considere a sentença aberta:

$2x + y = 10$ e U = {(1; 8); (8; 1); (2; 6); (3; 5)}

Vemos que o par (1; 8) satisfaz a sentença aberta, pois substituindo x por 1 e y por 8 obtemos uma sentença verdadeira. O par (8; 1) não satisfaz a sentença aberta, pois substituindo x por 8 e y por 1 obtemos uma sentença falsa. Vemos ainda que o par (2; 6) satisfaz e o par (3; 5) não satisfaz. Assim, o conjunto-verdade é:

$$V = \{(1; 8); (2; 6)\}$$

Se a sentença aberta tiver três variáveis, trabalharemos com trincas ordenadas; se tiver quatro variáveis, trabalharemos com quádruplas ordenadas e assim por diante, sempre respeitando a ordem alfabética ao efetuarmos as substituições.

1.6 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Equações são sentenças abertas que exprimem igualdade. Assim, por exemplo, as sentenças abertas:

$$4x - 1 = 7, \quad 3x^2 = 4x + 1, \quad \sqrt{x} - 1 = 9$$

são equações.

Dizemos que uma equação é uma **identidade** se e somente se o conjunto-verdade é igual ao conjunto-universo, isto é, a equação é satisfeita para todos os elementos do universo.

Exemplos

a) Considere a equação: $x + x = 2x$. É óbvio que esta equação será satisfeita para qualquer número. Dizemos então que é uma identidade.
b) A equação $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ é uma identidade muito conhecida.
c) Considere a equação $x^2 = 9$ e o universo U = {0; 1; 2; 3; 4}. O conjunto-verdade desta equação é V = {3}. Como o conjunto-verdade não coincide com o universo, então a equação não é uma identidade (em relação ao universo dado).
d) Considere novamente a equação $x^2 = 9$ e o universo U' = {3; –3}. Neste caso, todos os elementos do universo satisfazem a equação. Diremos então que a equação $x^2 = 9$ é uma identidade em relação ao universo U' = {3; –3}.

Os exemplos c e d, acima, ressaltam que uma equação pode ser identidade em relação a um universo, mas pode não ser identidade em relação a outro universo.

Inequações são sentenças abertas que exprimem desigualdade.

Assim, por exemplo, as sentenças abertas abaixo são inequações:

a) $x > 3$ (x é maior que 3)
b) $x < y$ (x é menor que y)
c) $x + y \neq 4$ (x mais y é diferente de 4)
d) $x \geq y$ (x é maior ou igual a y)
e) $x \leq y$ (x é menor ou igual a y)

Observações:

1) Consideremos as desigualdades $a > b$ e $c > d$. Costuma-se dizer que elas têm o mesmo sentido. Consideremos agora as desigualdades $a > b$ e $c < d$. É costume dizer que elas têm sentidos opostos.

2) Por uma questão de "costume", lemos a desigualdade:

$$a > b$$

do seguinte modo: "a é maior que b". No entanto, dizer que "$a > b$" é a mesma coisa que dizer que "$b < a$". Assim, obviamente, podemos ler a desigualdade:

$$a > b$$

de qualquer um dos seguintes modos:

"a é maior que b"
"b é menor que a"

Exercícios Resolvidos

1.5) Dê o conjunto-verdade de cada uma das sentenças abertas abaixo (em relação ao universo indicado):

a) $x - 3 = 7$ $\quad U = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
b) $x - 2 > 3$ $\quad U = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
c) $x^2 = 16$ $\quad U = \{2; -2; 3; -3; 4; -4\}$
d) $x^2 = 16$ $\quad U = \{2; 4; 6; 8\}$

Solução:

a) Dos elementos de U, o único que satisfaz a sentença aberta é 10. Assim: $V = \{10\}$.
b) $V = \{6; 7; 8; 9\}$.
c) $V = \{4; -4\}$.
d) Embora tenhamos a mesma sentença aberta do item anterior, o conjunto-verdade neste caso será diferente do anterior, pois aqui o único elemento de U que satisfaz é 4. Assim: $V = \{4\}$.

1.6) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta (em relação ao universo indicado):

a) $x - y = 1$ $\quad U = \{(5; 4); (4; 5); (7; 2); (10; 9)\}$
b) $x > y$ $\quad U = \{(1; 2); (2; 1); (5; 2)\}$
c) $x + y > z$ $\quad U = \{(1; 3; 2); (2; 3; 7); (4; 3; 3)\}$

Solução:

a) Os únicos pares ordenados que satisfazem são (5; 4) e (10; 9). Portanto $V = \{(5; 4); (10; 9)\}$
É conveniente destacar que, neste caso, o par ordenado (5; 4) satisfaz a sentança aberta, enquanto o par ordenado (4; 5) não satisfaz.

b) Neste caso, os pares ordenados que satisfazem são (2; 1) e (5; 2). Portanto V = {(2; 1); (5; 2)}

c) Façamos as substituições para verificarmos as trincas ordenadas que satisfazem:

	$x + y > z$	
(1; 3; 2)	$1 + 3 > 2$	verdade
(2; 3; 7)	$2 + 3 > 7$	falso
(4; 3; 3)	$4 + 3 > 3$	verdade

Portanto: V = {(1; 3; 2); (4; 3; 3)}

Exercícios Propostos

1.7) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta:

a) $4 + x = 9$ U = {3; 5; 7; 9; 10}

b) $x + 2 > 7$ U = {4; 5; 6; 7; 8; 9}

c) $x + 2 > 7$ U = {5; 6; 7; 8}

d) $x^2 = 4$ U = {–1; –2; –3; +1; +2; +3}

1.8) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta:

a) $x - y = 2$ U = {(10; 8); (5; 3); (3; 5); (2; 0)}

b) $y - x = 1$ U = {(8; 7); (4; 5); (1; 0); (0; 1)}

c) $2x - y > z$ U = {(1; 2; 3); (4; 2; 3); (1; 0; 1)}

1.7 – QUANTIFICADORES

A partir de uma sentença aberta, podemos obter uma sentença de dois modos:

1º) substituindo as variáveis por nomes.

2º) usando os **quantificadores**.

Quantificadores são expressões do tipo:

"Existe um x tal que..."

"Para todo x..."

Exemplo

Consideremos a sentença aberta: $x + 3 = 10$. Podemos substituir a variável por nomes, obtendo sentenças como, por exemplo:

$4 + 3 = 10$, $8 + 3 = 10$ etc.

Podemos, também, recorrer ao uso dos quantificadores, obtendo a sentença

"Existe um x tal que $x + 3 = 10$"

que obviamente é verdadeira, e a sentença

"Para todo x, $x + 3 = 10$"

que obviamente é falsa.

Podemos usar vários quantificadores em uma mesma sentença.

Exemplo

a) Para todo x, existe um y tal que $x > y$.
b) Para todo x e para todo y, $x < y$.

O quantificador "Para todo x..." é chamado **quantificador universal** e é simbolizado por $\forall x$ (costuma ser lido também: "qualquer que seja x...").

O quantificador "Existe um x tal que..." é chamado **quantificador existencial** e é simbolizado por $\exists x$.

Assim, a sentença "Existe um x tal que $x > 7$" pode ser simbolizada por:

$$\exists x, x > 7$$

e a sentença "Para todo x, $x + 3 = 10$" pode ser simbolizada por

$$\forall x, x + 3 = 10$$

É conveniente observar que quando dizemos: "Existe um x tal que..." *não* estamos dizendo que esse x é único. Por exemplo, a sentença:

"Existe um x tal que $x > 7$"

é verdadeira, embora haja mais de um número que é maior que 7.

Alguns autores representam a expressão

"Existe um único x tal que..." pelo símbolo $\exists x$.

1.8 – USO IMPLÍCITO DO QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Algumas vezes ocorre que o quantificador universal é omitido. Por exemplo, é muito comum em livros de matemática encontrarmos a propriedade comutativa da multiplicação de números reais expressa assim:

"Sendo x e y números reais, $xy = yx$"

quando, a rigor, deveria ser expressa assim:

"Sendo x e y números reais, $\forall x, \forall y, xy = yx$"

Desde que não haja perigo de confusão, o quantificador universal poderá ser omitido.

1.9 – CONECTIVOS

A partir de sentenças simples (atômicas) podemos formar sentenças compostas (moleculares) usando os conectivos. Os conectivos que consideraremos são os seguintes:

e	ou	se ... então	se e somente se	não

Por exemplo, consideremos as seguintes sentenças simples:

"João é loiro."
"José é inteligente."

Usando o conectivo **e** podemos formar a sentença molecular:

"João é loiro e José é inteligente."

Usando o conectivo **se... então...**, podemos formar a seguinte sentença molecular:

"Se João é loiro, então José é inteligente."

Consideremos agora a sentença simples:

"4 é igual a 3"

Usando o conectivo não, podemos formar a seguinte sentença molecular:

"4 não é igual a 3"

Nos itens seguintes analisaremos com mais detalhe cada conectivo.

1.10 – CONECTIVO "e"

O conectivo e costuma ser representado pelo símbolo $\wedge$. Assim, se p representa a sentença

"João é loiro"

e q representa a sentença

"José é inteligente",

a sentença composta

"João é loiro e José é inteligente"

será representada por.

$$p \wedge q$$

A sentença $p \wedge q$ é chamada conjunção das sentenças p e q.

Considera-se que a sentença $p \wedge q$ será verdadeira apenas no caso em que tanto p como q forem verdadeiras. Se uma delas (ou ambas) for falsa, a sentença $p \wedge q$ será considerada falsa. Usando o símbolo V para "verdadeira" e F para "falsa", podemos resumir o que foi dito acima através da chamada *tabela-verdade*:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos

a) A sentença molecular "4 = 3 + 1 e 5 > 2" é verdadeira, pois a sentença atômica "4 = 3 + 1" é verdadeira e a sentença atômica "5 > 2" também é verdadeira.

b) Seja p a sentença 4 > 3 e q a sentença 7 < 5. A sentença p é verdadeira e a sentença q é falsa. Assim, a sentença molecular $p \wedge q$ é falsa.

Observação: A "sentença" composta $a < b \wedge b < c$ pode ser representada de modo mais sintético do seguinte modo: $a < b < c$

1.11 – CONECTIVO "ou"

A palavra ou na linguagem natural pode aparecer com dois sentidos: *exclusivo* e *inclusivo*.

O sentido *exclusivo* aparece no seguinte exemplo:

"Depois de terminadas as provas, o aluno será aprovado ou será reprovado."

Neste caso, obviamente, não se admite que as duas possibilidades possam ser verdadeiras: ser aprovado e ser reprovado; uma possibilidade exclui a outra.

O sentido *inclusivo* aparece no seguinte exemplo:

"O cheque será pago desde que contenha a assinatura de João ou de Antônio."

Neste caso entendemos que se o cheque contiver apenas a assinatura de João, ele será pago. Se contiver apenas a assinatura de Antônio, ele será pago. Mas, se contiver ambas as assinaturas, é óbvio que também será pago. Portanto estamos diante de um caso em que podem ocorrer as duas possibilidades, enquanto que no caso do "ou" exclusivo não podem ocorrer as duas possibilidades.

Como curiosidade vale a pena destacar que em latim há duas palavras diferentes para os dois sentidos de ou:

vel para o ou inclusivo e **aut** para o ou exclusivo

Daqui em diante usaremos apenas o "ou" inclusivo e o simbolizaremos por $\vee$ (inicial da palavra "vel").

Sendo p e q sentenças, a sentença "$p \vee q$" é chamada **disjunção** de p e q.

A sentença "$p \vee q$" é considerada falsa apenas quando tanto "p" como "q" são falsas. Em qualquer outra situação, "$p \vee q$" é considerada verdadeira. Isto pode ser esquematizado através de uma tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos

a) A sentença: "$4 + 2 = 6$ ou $5 > 1$" é verdadeira.
b) A sentença: "$4 + 2 = 6$ ou $5 > 9$" é verdadeira.
c) A sentença: "$6 < 2$ ou $7 > 3$" é verdadeira.
d) A sentença: "$7 < 5$ ou $3 > 8$" é falsa.

Observação: A "sentença" composta "$a < b \vee a = b$" pode ser representada por "$a \leq b$". Do mesmo modo, $a \geq b$ representa "$a > b \vee a = b$".

1.12 – CONECTIVO "não"

Dada uma sentença p, podemos formar a negação de p do seguinte modo:

"é falso que p"

ou então: "não é verdade que p"

ou ainda, inserindo a palavra "não" em p.

Exemplo

A negação da setença

"João é loiro"

pode ser escrita

"Não é verdade que João seja loiro"

ou então

"É falso que João seja loiro"

ou ainda: "João não é loiro."

A negação de p será indicada por ~p e deverá obedecer à seguinte tabela-verdade:

p	~p
V	F
F	V

Exercícios Resolvidos

1.9) Sendo p a sentença: "Os gatos têm penas" e q a sentença: "José é estudioso", traduza para a linguagem natural as seguintes sentenças:

a) $\sim p$
b) $\sim q$
c) $p \wedge q$
d) $p \vee q$
e) $p \wedge \sim q$
f) $\sim p \vee \sim q$

Solução:

a) Os gatos não têm penas.
b) José não é estudioso.
c) Os gatos têm penas e José é estudioso.
d) Os gatos têm penas ou José é estudioso.
e) Os gatos têm penas e José não é estudioso.
f) Os gatos não têm penas ou José não é estudioso.

1.10) Sendo p a sentença: "José é alto" e q a sentença: "Pedro é baixo", simbolize as seguintes sentenças da linguagem natural:

a) Pedro é baixo e José é alto.
b) Pedro é baixo ou José é alto.
c) Pedro não é baixo.
d) José é alto e Pedro não é baixo.
e) José não é alto ou Pedro não é baixo.

Solução:

a) $q \wedge p$
b) $q \vee p$
c) $\sim q$
d) $p \wedge \sim q$
e) $\sim p \vee \sim q$

1.11) Sendo p a sentença: "João é alto" e q a sentença: "João é loiro", simbolize as seguintes sentenças:

a) João é alto e loiro.
b) É falso que João seja alto e loiro.
e) Não é verdade que João seja alto ou loiro.
d) João é alto, mas não é loiro.
e) João não é alto nem loiro.

Solução:

a) $p \wedge q$
b) $\sim(p \wedge q)$
c) $\sim(p \vee q)$
d) $p \wedge \sim q$
e) $\sim p \wedge \sim q$

Exercícios Propostos

1.12) Sendo p a sentença: "Salvador fica na Bahia" e q a sentença: "Pássaros voam", traduza para a linguagem natural.

a) $\sim p$
b) $\sim q$
c) $p \wedge q$
d) $p \vee q$
e) $p \vee \sim q$
f) $\sim p \wedge q$
g) $\sim(p \vee q)$
h) $\sim(p \wedge q)$

1.13) Sendo p a sentença: "Pedro é moreno" e q a sentença: "Maria é bonita" simbolize as sentenças:

a) Pedro é moreno e Maria é bonita.
b) Pedro não é moreno e Maria não é bonita
c) Não é verdade que Pedro seja moreno e Maria seja bonita.
d) Maria não é bonita ou Pedro é moreno.

1.13 – CONECTIVO "se... então..."

Sejam duas sentenças p e q. A sentença:

"Se p então q"

é denominada condicional e é representada por:

$$p \Rightarrow q$$

Assim, por exemplo, a sentença:

"Se João é alto então Maria é loira."

pode ser escrita assim:

João é alto $\Rightarrow$ Maria é loira

O condicional $p \Rightarrow q$ pode ser lido também de um dos seguintes modos:

1º) p implica q
2º) p somente se q
3º) p é condição suficiente para q
4º) q é condição necessária para p

A sentença $p \Rightarrow q$ só é considerada falsa quando p é verdadeira e q é falsa. Nos outros casos é verdadeira. Assim, a tabela-verdade é:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos

a) A sentença "$5 > 2 \Rightarrow 3 + 1 = 4$" é verdadeira.
b) A sentença "$12 > 7 \Rightarrow 3 < 2$ é falsa.
c) A sentença "$5 < 2 \Rightarrow 7 = 2 + 5$" é verdadeira.
d) A sentença "$5 < 2 \Rightarrow 1 > 3$" é verdadeira.

1.14 – CONECTIVO "se e somente se"

A sentença composta:

$$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$$

pode ser escrita de modo mais sintético:

$$p \Leftrightarrow q$$

Esta última é chamada **bicondicional** e pode ser lida dos seguintes modos:
1º) p se e somente se q.
2º) q se e somente se p.
3º) p é equivalente a q.
4º) q é equivalente a p.
5º) p é condição necessária e suficiente para q.
6º) q é condição necessária e suficiente para p.

Exemplos

a) A sentença "x é par se e somente se x^2 é par" pode ser escrita:

$$x \text{ é par} \Leftrightarrow x^2 \text{ é par}$$

b) A sentença "A condição necessária e suficiente para que $5 > 2$ é que $3 < 7$" pode ser escrita:

$$5 > 2 \Leftrightarrow 3 < 7$$

A tabela-verdade de $p \Leftrightarrow q$ é:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

isto é, para que $p \Leftrightarrow q$ seja verdadeira devemos ter p e q ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Exercícios Resolvidos

1.14) Sendo p a sentença "Maria é loira", q a sentença "João é alto" e r a sentença
"José é inteligente", simbolize as seguintes sentenças:
a) Se João é alto então Maria é loira.
b) José é inteligente se João é alto.
c) Maria é loira implica João é alto.
d) José é inteligente somente se Maria é loira.
e) Maria é loira é condição suficiente para que João seja alto.
f) Maria é loira é condição necessária para que João seja alto.
g) Maria é loira é condição necessária e suficiente para que João seja alto.

Solução:

a) $q \Rightarrow p$
b) Reparemos primeiramente que esta sentença pode ser escrita assim:

"Se João é alto então José é inteligente"

Portanto seu simbolo é $q \Rightarrow r$.
c) $p \Rightarrow q$
d) $r \Rightarrow p$
e) $p \Rightarrow q$
f) $q \Rightarrow p$
g) $p \Leftrightarrow q$

1.15) Consideremos as sentenças p, q, r e s dadas por:
(p) $4 > 3$
(r) $2 > 6$
(q) $5 < 9$
(s) $7 > 9$
Dê o valor verdadeiro ou falso às sentenças:
a) $p \Rightarrow q$
b) $p \Rightarrow r$
c) $p \Rightarrow s$
d) $r \Rightarrow q$
e) $r \Rightarrow s$
f) $p \Leftrightarrow q$
g) $p \Leftrightarrow r$
h) $r \Leftrightarrow s$

Solução:

Confrontando com as tabelas-verdade obtemos:
a) V
b) F
c) F

d) V
e) V
f) V
g) F
h) V

1.16) Sendo p, q e r sentenças, determine a tabela-verdade das seguintes sentenças moleculares:
a) $\sim(p \wedge \sim q)$
b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Solução:

a)

p	q	~q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

b)

p	q	r	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

1.17) Considere a sentença p: "Todos os coelhos usam óculos".
Qual das duas sentenças abaixo é a negação de p?

q: "Nenhum coelho usa óculos."
r: "Existe pelo menos um coelho que não usa óculos."

Solução:

Lembremos que a negação de p obedece a tabela-verdade abaixo, isto é, quando p é verdadeira, ~p é falsa, e quando p é falsa, ~p é verdadeira.

p	~p
V	F
F	V

A sentença **q** não é a negação de p, pois poderia ocorrer de p e q serem simultaneamente falsas. Para tanto, bastaria que houvesse, por exemplo, apenas dois coelhos que usassem óculos. A sentença **r** é a negação de p, pois é fácil perceber que quando **p** for verdadeira, **r** será falsa e quando p for falsa, *r* será verdadeira.

Exercícios Propostos

1.18) Consideremos as sentenças **p**, q, **r** e **s** dadas por:

(p) $4 = 7$
(r) $8 > 6$
(q) $3 < 2$
(s) $7 < 9$

Simbolize as seguintes sentenças:

a) Se $7 < 9$ então $4 = 7$
b) $8 > 6$ se $3 < 2$
c) $3 < 2$ implica $7 < 9$
d) $8 > 6$ somente se $4 = 7$
e) $3 < 2$ é condição necessária para que $7 < 9$
f) $3 < 2$ é condição suficiente para que $7 < 9$
g) A condição necessária para que $4 = 7$ é que $8 > 6$
h) A condição suficiente para que $3 < 2$ é que $7 < 9$
i) A condição necessária e suficiente para que $7 < 9$ é que $3 < 2$
j) $4 = 7$ é equivalente a $7 < 9$

1.19) Sendo **p**, **q**, **r** e **s** as sentenças do exercício anterior, dê o valor verdadeiro ou falso:

a) $p \Rightarrow q$
b) $r \Rightarrow s$
c) $r \Rightarrow p$
d) $r \Leftrightarrow s$
e) $p \Leftrightarrow q$
f) $r \Leftrightarrow q$
g) $\sim p \Rightarrow q$
h) $\sim r \Rightarrow s$
i) $\sim r \Rightarrow \sim q$
j) $\sim(r \Leftrightarrow q)$
k) $\sim(p \Leftrightarrow s)$
l) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q)$

1.20) Construa as tabelas-verdade das seguintes sentenças moleculares:

a) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$
b) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge p)$

1.21) Dê a negação de cada sentença:

a) Todos os marcianos usam camisola.
b) Nenhum camelo tem rabo.
c) Existe pelo menos um habitante na Lua.

Conjuntos

2.1 – INTRODUÇÃO

Para apresentarmos rigorosamente o conceito de conjunto, deveríamos recorrer a um tratamento axiomático, o que foge ao nível do nosso curso. Assim, contentar-nos-emos com uma idéia *intuitiva* e *aproximada*: conjunto é coleção de objetos. Os objetos que formam um conjunto são os seus **elementos**. De modo geral, os objetos que formam um conjunto podem ser de qualquer tipo: números, países, pessoas, pontos etc

É usual representar os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas. Se quisermos indicar que o objeto a é elemento do conjunto A escreveremos:

$$a \in A$$

que podemos ler: "a pertence a A".

Se o objeto a não é elemento de A, escrevemos:

$$a \notin A$$

que pode ser lido: "a não pertence a A".

Um dos modos de se representar um conjunto é escrever os *nomes* de seus elementos entre chaves. Assim, por exemplo, o conjunto formado pelos números 3, 6 e 7 pode ser representado por:

$$A = \{3; 6; 7\}$$

Este modo de representar pode, em certos casos, ser usado mesmo que haja um número elevado de elementos. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros que vão de 1 a 800 pode ser assim representado:

$$B = \{1; 2; 3; 4; ...; 800\}$$

Em alguns casos, este modo de representação pode ser usado para conjuntos infinitos. Como exemplo, podemos representar o conjunto de todos os números inteiros maiores que 7:

$$C = \{8; 9; 10; 11; ...\}$$

Um outro modo de representar um conjunto é dando uma sentença aberta que seus elementos devem satisfazer. Assim, por exemplo, o conjunto dos estados do Brasil pode ser representado por:

$$A = \{x \mid x \text{ é estado do Brasil}\}$$

que lemos: "A é o conjunto dos x tais que x é estado do Brasil."

Note que a barra vertical " | " é lida "tal que".

Exemplo

Consideremos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ e seja A o conjunto dos números naturais menores que 6. Podemos representar o conjunto A por:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

ou então:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

que lemos: "A é o conjunto dos x pertencentes a $\mathbb{N}$, tais que $x < 6$."

Alguns autores usam, no lugar da barra vertical, dois pontos ou então ponto e vírgula. Assim, o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

pode também ser representado por:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 6\} \text{ ou } A = \{x \in \mathbb{N} ; x < 6\}$$

2.2 – IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dizemos que os conjuntos A e B são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos, isto é, todo elemento de A é também elemento de B e todo elemento de B é também elemento de A. Para indicar que A é igual a B escrevemos:

$$A = B$$

Observe que, quando escrevemos A = B, A e B são o *mesmo conjunto*, isto é, A e B são nomes diferentes de um mesmo conjunto.

Exemplo

a) Os conjuntos: $A = \{3; 4; 7\}$ e $B = \{4; 7; 3\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos, embora estejam escritos em ordem diferente.
b) $\{1; 5; 6\} = \{1; 5; 6; 5\}$
Repare que neste caso os dois conjuntos têm os mesmos elementos (embora em um deles o número 5 esteja representado duas vezes), isto é, os dois conjuntos têm três elementos.

2.3 – O CONJUNTO VAZIO

Vimos que podemos representar um conjunto dando uma sentença aberta que seus elementos devem satisfazer. No entanto pode ocorrer que a sentença aberta não seja satisfeita por nenhum elemento. Por exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = -4\}$$

Obviamente não há nenhum número natural cujo quadrado seja negativo e portanto o conjunto A não possui elementos. Dizemos que o conjunto A é **vazio**. O símbolo do conjunto vazio é

$$\varnothing$$

2.4 – ALGUNS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Neste item citaremos apenas alguns conjuntos numéricos que servirão para os nossos primeiros exercícios. Mais adiante citaremos outros conjuntos numéricos.

a) $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

É o conjunto dos números naturais.

b) $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ...\} = \{x \in \mathbb{N} | x \neq 0\}$

De modo geral, o asterisco colocado no alto do símbolo de um conjunto numérico indica exclusão do zero.

c) $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

É o conjunto dos números inteiros.

d) $\mathbb{Z}^* = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$

e) $\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; ...\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$

f) $\mathbb{Z}_- = \{...; -3; -2; -1; 0\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$

g) $\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3; ...\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$

h) $\mathbb{Z}_-^* = \{...; -3; -2; -1\} = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$

Exercícios Resolvidos

2.1) Dado o conjunto $A = \{2; 6; 5; 7\}$, dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $2 \in A$ c) $8 \notin A$ e) $\{6; 7; 2; 5\} = A$
b) $6 \notin A$ d) $9 \in A$ f) $\{2; 6; 5; 7; 2; 5\} = A$

Solução:

a) V c) V e) V
b) F d) F f) V

2.2) Dê o valor verdadeiro ou falso:

a) $4 \in \{2; 4; 5\}$ d) $\{0\} = \varnothing$ g) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$
b) $4 \in \{4\}$ e) $-8 \in \mathbb{N}$ h) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
c) $4 = \{4\}$ f) $-8 \in \mathbb{Z}$ i) $0 \in \mathbb{Z}_-$

Solução:

a) V
b) V
c) F (o elemento 4 não é a mesma coisa que o conjunto formado pelo número 4).
d) O conjunto {0} possui um elemento que é o número zero. Portanto não é vazio e assim a sentença é falsa.
e) F
f) V
g) F
h) V
i) V

2.3) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 8\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x < 11\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} | x > -3\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 4\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 2\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é par} \wedge 5 \leq x < 18\}$

Solução:

a) $A = \{4; 5; 6; 7; ...\}$.
b) $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
c) $C = \{4; 5; 6; 7\}$.
d) $D = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
e) $E = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$.
f) $F = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
g) $G = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
h) $H = \{6; 8; 10; 12; 14; 16\}$.

2.4) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x | x \text{ é par} \wedge 7 \leq x \leq 9\}$

d) $D = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge 9 < x < 5\}$

Solução:

a) Aqui a variável k pode ser qualquer número natural. Portanto:

$$\begin{cases} \text{para } k = 0 \text{ temos } x = 2(0) = 0 \\ \text{para } k = 1 \text{ temos } x = 2(1) = 2 \\ \text{para } k = 2 \text{ temos } x = 2(2) = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e assim podemos escrever: $A = \{0; 2; 4; 6; 8; ...\}$.

b) Neste caso também, a variável k pode assumir qualquer valor natural. Fazendo algumas substituições:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 2(0) + 1 = 1 \\ k = 1 \Rightarrow x = 2(1) + 1 = 3 \\ k = 2 \Rightarrow x = 2(2) + 1 = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Assim: $A = \{1; 3; 5; ...\}$.

c) Neste caso, o único número par que está entre 7 e 9 é o número 8 e portanto C = {8}.

d) Não há nenhum número natural que satisfaça a sentença aberta: $9 < x < 5$; portanto $D = \varnothing$.

Exercícios Propostos

2.5) Dê o valor de V ou F;

a) $5 \in \{3; 4; 5; 7\}$
b) $7 \notin \{3; 4; 5; 7\}$
c) $8 \notin \{3; 4; 5; 7\}$
d) $10 \in \{2; 4; 6; 8\}$
e) $5 \in \{5\}$
f) $5 = \{5\}$
g) $0 \in \{0\}$
h) $\{0\} = \varnothing$
i) $0 \in \varnothing$
j) $7 \in \varnothing$
k) $-5 \in \mathbb{Z}$
l) $-5 \in \mathbb{Z}_+$
m) $-5 \in \mathbb{Z}_-$
n) $0 \in \mathbb{Z}_+$
o) $0 \notin \mathbb{Z}^*$

2.6) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 3\}$
e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 \leq x \leq 3\}$
f) $F = \{x : x \in \mathbb{Z}^- \mid x > -6\}$
g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é impar e } 4 \leq x \leq 8\}$
h) $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$
i) $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$
j) $J = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*\}$
k) $K = \{x : x \in \mathbb{N},\ 4 < x < 6\}$
l) $L = \{x : x \in \mathbb{N},\ 8 < x < 7\}$

2.5 – SUBCONJUNTO

Consideremos dois conjuntos **A** e **B**. Dizemos que **A está contido em B** se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. Para indicar que "A está contido em B" escrevemos:

$$A \subset B$$

Exemplos

a) Sendo $A = \{1; 2\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$ temos $A \subset B$.
b) $\{3; 5; 6\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
c) $\{3; 5; 6\} \subset \{3; 5; 6\}$.
d) $\{4\} \subset \{2; 4; 6\}$.

Outros modos de ler $A \subset B$ são:

A é parte de B A é subconjunto de B B contém A

Quando queremos dizer que "A não está contido em B" escrevemos: $A \not\subset B$. Assim, por exemplo, temos:

$$\{3; 4\} \not\subset \{3; 5; 7\}$$

Podemos dizer que um conjunto está contido em si mesmo (veja exemplo c acima).

Dizemos que A é **subconjunto próprio** de B (ou que "A está contido propriamente em B") se e somente se

$$A \subset B \text{ e } A \neq B$$

Exemplos

a) Sendo $A = \{3; 4\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$ temos $A \subset B$ e $A \neq B$. Portanto podemos dizer que A é subconjunto próprio de B.
b) Dados $A = \{3; 5; 6\}$ e $B = \{5; 3; 6\}$, temos $A \subset B$ e $A = B$. Portanto A é subconjunto de B, mas *não* é subconjunto próprio de B.

Alguns autores, para indicar que $A \subset B$, usam também a notação $B \supset A$. Vamos dar novamente a definição de subconjunto, de modo mais formal: Sendo A e B conjuntos, dizemos que A está contido em B se e somente se

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Façamos $A = \varnothing$. Repare que a sentença:

$$\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in B$$

é verdadeira, pois:

1º) $x \in \varnothing$ é sempre falsa.
2º) lembrando das tabelas-verdade, sabemos que uma condicional de antecedente falso é sempre verdadeira.

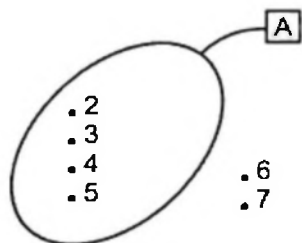
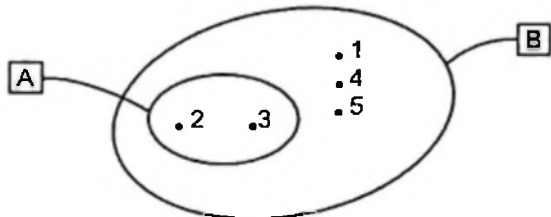
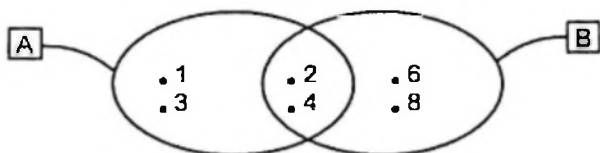
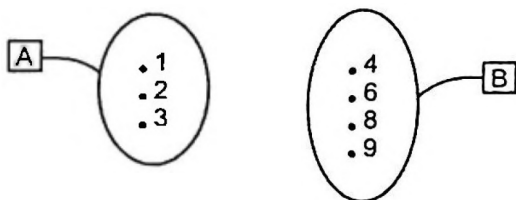
Portanto, podemos dizer que $\varnothing \subset B$, qualquer que seja o conjunto B, isto é, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

É importante não confundir o uso dos simbolos $\in$ e $\subset$. O primeiro serve para indicar que um objeto é *elemento* de um *conjunto*. O segundo serve para indicar que um *conjunto* está contido em outro *conjunto*.

2.6 – DIAGRAMAS DE VENN

Um bom modo de visualizar as relações entre os conjuntos é através dos diagramas de **Venn** (John Venn, inglês, 1834 - 1923). Os conjuntos são representados por regiões planas interiores a uma curva fechada e simples ("simples", aqui, significa não-entrelaçada).

Exemplos

a) Seja A = {2; 3; 4; 5}
$3 \in A$
$7 \notin A$

b) Sejam A = {2; 3} e B = {1; 2; 3; 4; 5}. Neste caso $A \subset B$ e $A \neq B$.

c) Tomemos agora A = {1; 2; 3; 4} e B = {2; 4; 6; 8}. A e B têm algu elementos comuns (mas não todos).

d) Sejam A = {1; 2; 3} e B = {4; 6; 8; 9}. Neste caso não há elementos comuns.

Exercícios Resolvidos

2.7) Dado A = {2; 3; 6}, dê o valor V ou F:

a) $2 \in A$
b) $2 \subset A$
c) $\{2; 6\} \in A$
d) $\{2; 6\} \subset A$
e) $\{2\} \in A$
f) $\{2\} \subset A$
g) $\varnothing \in A$
h) $\varnothing \subset A$

Solução:

a) V
b) F
c) F
d) V
e) F
f) V
g) F
h) V

2.8) Dê o valor de V ou F:

a) $\{3; 5; 7\} \subset \{3; 4; 5; 8\}$
b) $\{3; 5; 7\} \subseteq \{3; 5; 7\}$
c) $\{2; 3; 4; 5\} \supset \{3; 5\}$
d) $\{3; 5;\} \subset \{2; 3; 4; 5\}$
e) $\varnothing \subset \{2; 3\}$
f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
g) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{N}$
h) $\mathbb{Z}^*_+ \not\subset \mathbb{N}$

Solução:

a) F
b) V
c) V
d) V
e) V
f) V
g) F
h) F

2.9) Dê o valor de V ou F:

a) {2; 3} é subconjunto de {1; 2; 3; 4}
b) {2; 3} é subconjunto próprio de {1; 2; 3; 4}
c) {3; 5; 9} é subconjunto de {3; 5; 9}
d) {3; 5; 9} é subconjunto próprio de {3; 5; 9}

Solução:

a) V
b) V
c) V
d) F

2.10) Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, dê o valor de V ou F:

a) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$
c) $A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Solução:

a) V
b) V
c) V

2.11) Considere as seguintes sentenças:

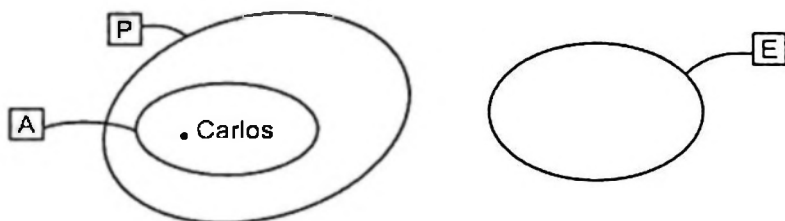
1º) Nenhum esportista é preguiçoso.
2º) Carlos é advogado.
3º) Todos os advogados são preguiçosos.

Admitindo que as três sentenças são verdadeiras, verifique qual das sentenças a seguir é certamente verdadeira:

a) Todos os preguiçosos são advogados.
b) Algum esportista é advogado.
c) Alguns advogados são esportistas.
d) Carlos não é esportista.

Solução:

Sejam $\begin{cases} A = \text{conjunto dos advogados} \\ E = \text{conjunto dos esportistas} \\ P = \text{conjunto dos preguiçosos} \end{cases}$

Das premissas (premissas são as sentenças iniciais, supostas verdadeiras) concluímos que o diagrama dos conjuntos é:

a) Esta não pode ser considerada obrigatoriamente verdadeira, pois o que sabemos é que "todos os advogados são preguiçosos" (isto é, $A \subset P$), mas ninguém nos garante que todos os preguiçosos são advogados (isto é, $P \subset A$).
b) Não há elemento comum aos conjuntos P e E. Portanto, a sentença b é falsa.
c) Pela mesma razão anterior, a sentença c é falsa.
d) A sentença d é verdadeira.

Exercicios Propostos

2.12) Sendo $A = \{1; 2; 4; 6; 9\}$, dê o valor de V ou F:

a) $4 \in A$
b) $4 \subset A$
c) $\{2; 9\} \in A$
d) $\{2; 9\} \subset A$
e) $\{4\} \in A$
f) $\{4\} \subset A$
g) $\varnothing \in A$
h) $\varnothing \subset A$
i) $\{2; 5\} \subset A$
j) $\{1; 2; 7\} \not\subset A$
k) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
l) $\{2; 1\}$ é subconjunto de A
m) $\{2; 1\}$ é subconjunto próprio de A
n) $\{1; 2; 4; 9; 6\}$ é subconjunto de A
o) $\{1; 2; 4; 9; 6\}$ é subconjunto próprio de A

2.13) Considere as seguintes premissas:

(I) Quem sabe caçar borboletas não é engraçado.
(II) Coelhos não sabem andar de bicicleta.
(III) Quem não sabe andar de bicicleta é engraçado.

Dentre as sentenças a seguir, diga qual pode ser conclusão das premissas:

a) Quem não sabe andar de bicicleta é coelho.
b) Quem sabe andar de bicicleta não é engraçado.
c) Quem não sabe caçar borboletas é engraçado.
d) Coelhos não sabem caçar borboletas.
e) As pessoas engraçadas não sabem andar de bibicleta.

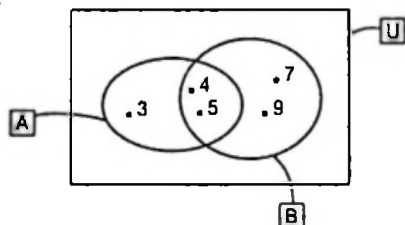
2.14) Dadas as premissas:

(I) Todos os médicos são pobres.
(II) Artistas são chatos.
(III) Margarido é médico.
(IV) Nenhum chato é pobre.

Assinale entre as sentenças a seguir aquela que pode ser considerada uma conclusão das premissas:

a) Alguns pobres são chatos.
b) Margarido não é artista.
c) Existe pelo menos um médico que é artista.
d) Alguns artistas são pobres.

2.7 – CONJUNTO UNIVERSO

De modo geral, nas aplicações da teoria dos conjuntos, todos os conjuntos considerados são subconjuntos de um mesmo conjunto U denominado **conjunto-universo**. Nos diagramas é "usual" representar o universo por um retângulo e dentro dele os seus subconjuntos. Assim, por exemplo, sendo $U = \mathbb{N}$, $A = \{3; 4; 5\}$ e $B = \{4; 5; 7; 9\}$ temos:

2.8 – INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Sejam os conjuntos A e B subconjuntos de U. A interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos de U, comuns a A e B. A interseção de A e B é indicada por:

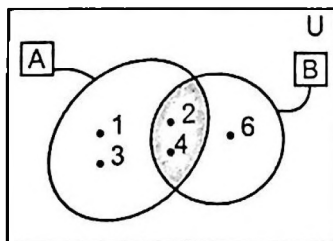
$$A \cap B$$

que podemos ler: "A inter B".

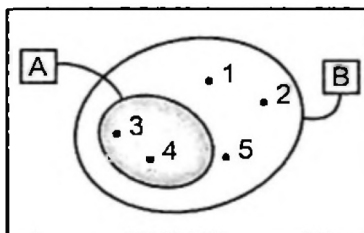
Exemplos

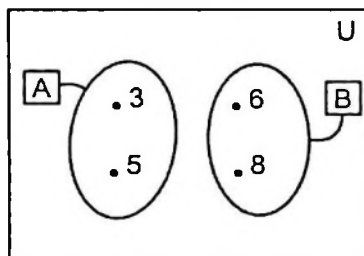
a) Dados $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{2; 4; 6\}$, os elementos comuns a A e B são 2 e 4. Assim:

$$A \cap B = \{2; 4\}$$

No diagrama a interseção está sombreada.

b) Sejam $A = \{3; 4\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Neste caso os elementos comuns são 3 e 4, e portanto:

$$A \cap B = \{3; 4\}$$

Repare que, neste caso, $A \subset B$ e assim $A \cap B = A$.
No diagrama a interseção está sombreada.

c) Sejam $A = \{3; 5\}$ e $B = \{6; 8\}$. Aqui não há elementos comuns e então a interseção é vazia:

$$A \cap B = \varnothing$$

Consideremos dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \varnothing$. Neste caso dizemos que A e B são disjuntos. É o que acontece no exemplo c acima.

De modo mais formal, podemos dar a definição de interseção de conjuntos do seguinte modo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

2.9 – UNIÃO DE CONJUNTOS

Consideremos os conjuntos A e B, ambos subconjuntos de U. **A união (ou reunião) de A e B** é o conjunto de todos os elementos de U que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos. A união de A e B é indicada por:

$$A \cup B$$

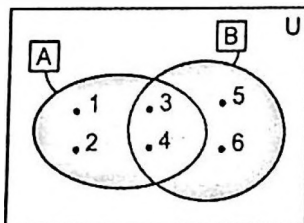
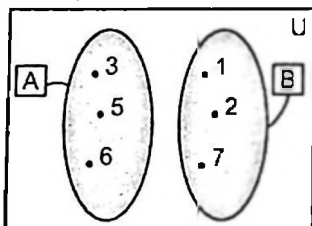
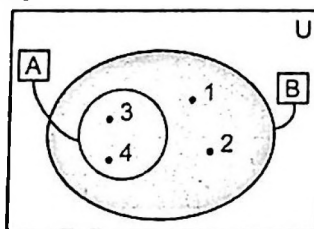
que podemos ler: "A união B".

De modo mais formal:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemplos

a) $A = \{1; 2; 3; 4\}$
$B = \{3; 4; 5; 6\}$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

A união de A e B está sombreada no diagrama.

b) A = {3; 5; 6}
B = {1; 2; 7}
A ∪ B = {1; 2; 7; 3; 5; 6}

c) A = {3; 4}
B = {1; 2; 3; 4}
A ∪ B = {3; 4; 1; 2}

2.10 – PROPRIEDADES

Sejam A, B e C subconjuntos quaisquer de U. É fácil verificar as seguintes propriedades:

I) $A \cup A = A$	IV) $A \cap \varnothing = \varnothing$
II) $A \cap A = A$	V) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
III) $A \cup \varnothing = A$	VI) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
comutativas	
VII) $A \cup B = B \cup A$	VIII) $A \cap B = B \cap A$
associativas	
IX) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	X) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distributivas	
XI) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
XII) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

2.11 – DIFERENÇA

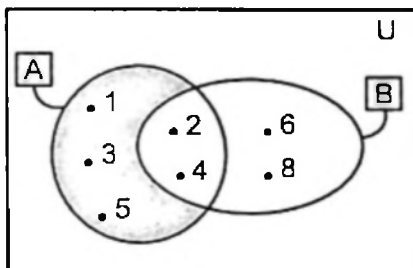
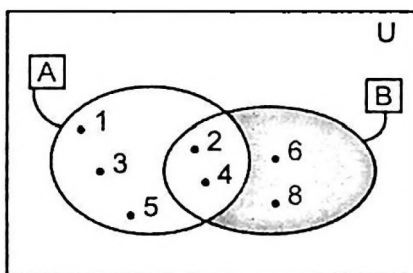
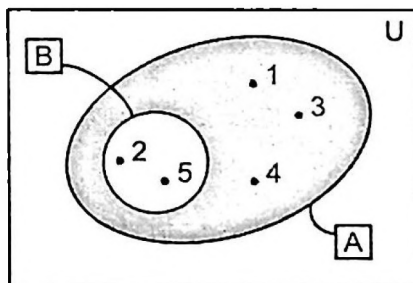
Sejam A e B subconjuntos de U. A diferença entre A é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B, isto é, é o conjunto de todos os elementos de A com exceção dos que são comuns a A e B. A diferença entre A e B é indicada por:

$$A - B$$

Temos então:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemplos

a) A = {1; 2; 3; 4; 5}
B = {2; 4; 6; 8}
A – B = {1; 3; 5}

b) A = {1; 2; 3; 4: 5}
B = {2; 4; 6; 8}
B – A = {6; 8}

c) A = {1; 2: 3; 4; 5}
B = {2; 5}
A – B = {1; 3; 4}

d) A = {2; 3; 4; 5}
B = {1; 2; 3; 4; 5}
A – B = ∅

e) A = {3; 4; 5}
B = {2; 7; 8}
A – B = {3; 4; 5} = A
B – A = {2; 7; 8} = B

É importante observar que, em geral, A – B ≠ B – A.

2.12 – COMPLEMENTAR

Sejam A e B subconjuntos de U tais que $A \subset B$. Neste caso, a diferença B – A é denominada **complementar de A em B** e é indicada por:

$$C_B^A$$

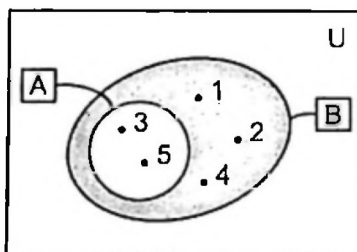
Temos então:

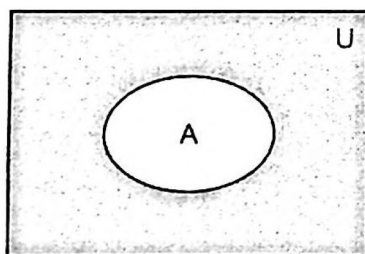
$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow B - A = C_B^A}$$

Exemplo

Tomemos os conjuntos A = {3; 5} e B = {1; 2; 3; 4; 5}. Neste caso $A \subset B$ e portanto a diferença B – A pode ser chamada de "complementar de A em B".

$$B - A = C_B^A = \{1; 2; 4\}$$

No diagrama está sombreado C_B^A.

Quando quisermos o complementar de A em U, podemos usar uma das notações:

$$C_U^A = C_A = A' = \bar{A}.$$

2.13 – PROPRIEDADES

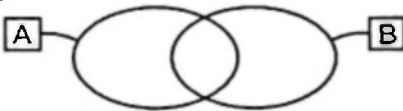
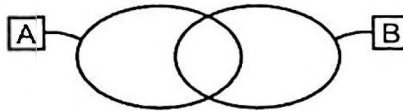
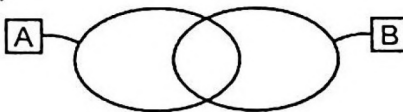
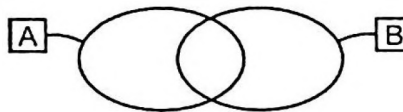
Sejam A, B e C subconjuntos quaisquer de U. Valem as seguintes propriedades:

I) $A - A = \varnothing$	V) $\varnothing' = U$
II) $A - \varnothing = A$	VI) $U' = \varnothing$
III) $\varnothing - A = \varnothing$	VII) $A \cup A' = U$
IV) $(A')' = A$	VIII) $A \cap A' = \varnothing$

Leis de De Morgan

IX) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
X) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
XI) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
XII) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Observação: Augustus De Morgan (1806-1871) embora tenha nascido na Índia era de família e formação inglesas. Juntamente com George Boole (inglês, 1815-1864) é considerado o iniciador da lógica moderna.

Exercícios Resolvidos

2.15) Dados: A = {2; 5; 7; 9; 8}, B = {7; 9; 6; 4}, C = {2; 4; 5; 6; 7; 8; 9} e D = {9; 6; 0; 1}, determine:

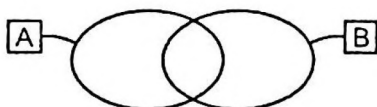
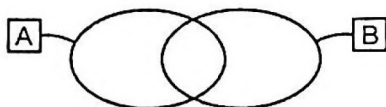
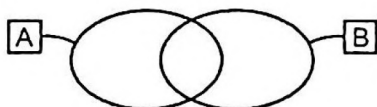
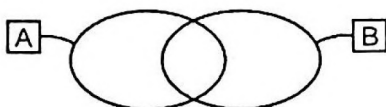
a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \cup (B \cap D)$
d) $A \cap (B \cup D)$
e) $A - B$
f) $B - A$
g) C_C^A
h) C_C^B

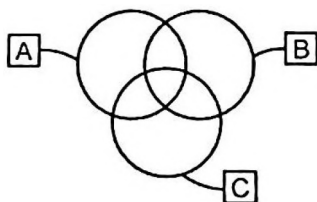
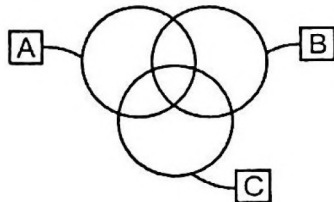
Solução:

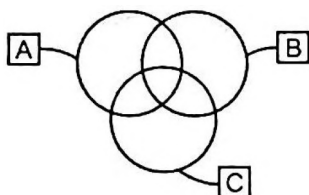
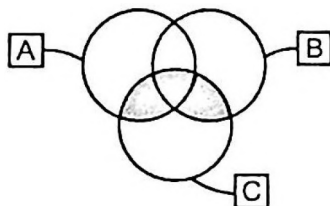
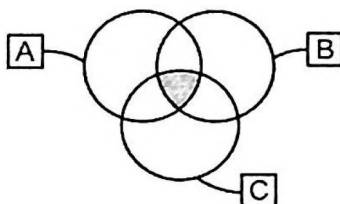
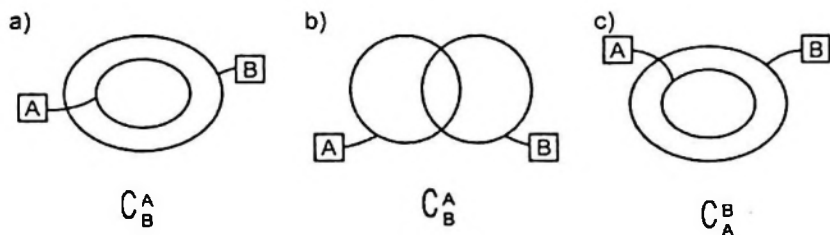
a) {7; 9}
b) {2; 5; 7; 9; 8; 6; 4}
c) {2; 5; 7; 9; 8; 6}
d) {7; 9}
e) {2; 5; 8}
f) {6; 4}
g) {4; 6}
h) {2; 5; 8}

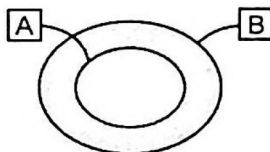
2.16) Nos diagramas abaixo, sombreie as regiões pedidas:

A ∩ B   A ∪ B

A − B   B − A

Solução:

2.17) Nos diagramas abaixo, sombreie as regiões pedidas:

Solução:

a) Em primeiro lugar sombreamos $A \cup B$:

Em seguida fazemos a interseção da região sombreada com C, obtendo finalmente:

b) A operação de interseção é associativa, isto é, tanto faz obter $(A \cap B) \cap C$ como $A \cap (B \cap C)$. O que queremos é a região comum aos três conjuntos. Portanto:

2.18) Sombreie, quando possível, as regiões pedidas:

Solução:

a) Aqui temos $A \subset B$; portanto existe C_B^A que é dado por B – A.

b) Neste caso $A \not\subset B$ e portanto não existe C_B^A embora exista a diferença B – A.

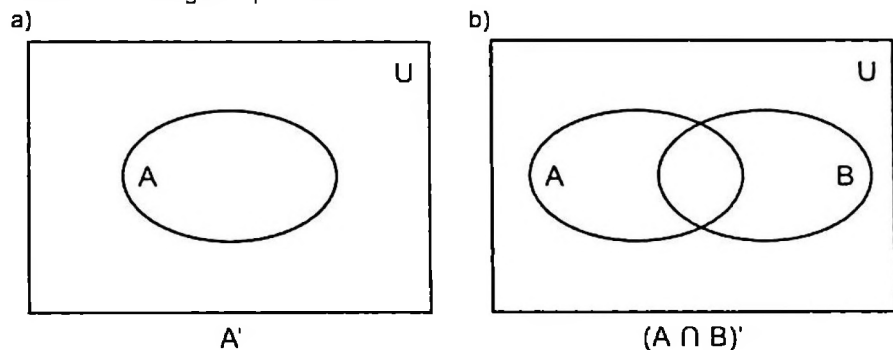
c) Para este caso, $B \not\subset A$ e assim não está definido C_A^B.

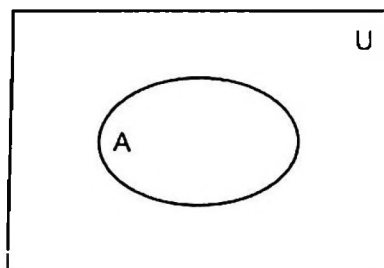
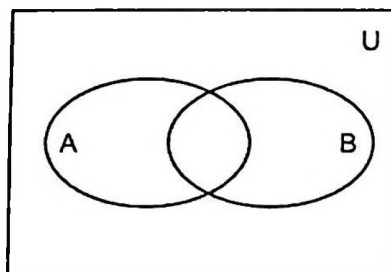
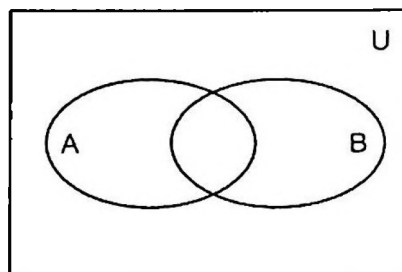
2.19) Sombreie as regiões pedidas:

a)

A'

b)

$(A \cap B)'$

Solução:

a) $A' = C_U^A = U - A$

b) Façamos primeiramente $A \cap B$ (figura a) e em seguida o complementar de $A \cap B$ (figura b).

(fig. a)

(fig. b)

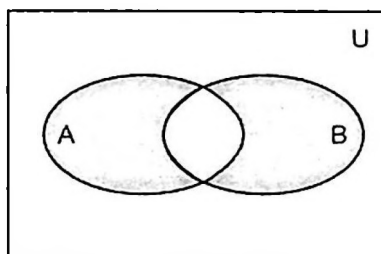
Exercícios Propostos

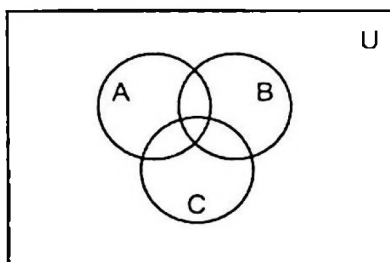
2.20) Dados $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $C = \{3; 4; 6\}$, $D = \{1; 5; 4; 8\}$ e $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ determine:

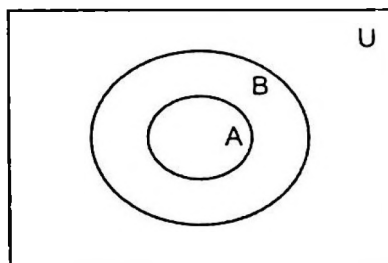
a) $B \cup C$
b) $B \cap C$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $(A \cap C) \cup D$
e) $A \cap B$
f) $A \cup C \cup D$
g) $A \cap C \cap D$
h) $A - C$
i) $C - A$
j) C_E^D
k) $C_E^{(B \cap D)}$
l) $E - (B \cap C)$

2.21) Sejam A e B subconjuntos de U. A diferença simétrica de A e B é indicada por $A \Delta B$ e definida por:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Dados: $A = \{4; 6; 8; 1; 7\}$ e $B = \{5; 9; 1; 8\}$, determine $A \Delta B$.

2.22) Dado o diagrama ao lado, sombreie as regiões pedidas:

a) $A \cap C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $A - B$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
e) $(B \cap C) - A$
f) A'
g) $[(A - B) \cup C]'$

2.23) Dado o seguinte diagrama, apenas uma das sentenças abaixo é verdadeira. Qual?

a) $A' \subset B'$
b) $A' - B' = A - B$
c) $A' \cap B' = B'$
d) $A' \cap B' = \emptyset$
e) $A' \cup B' = U$

2.24) Sejam A, B, C, D subconjuntos quaisquer de U. Dê o valor V ou F às sentenças:

a) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = A$
b) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
c) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

d) $A \subset B \Rightarrow A - B = A$

e) $A \subset B \Rightarrow A - B = \varnothing$

f) $A \subset B \Rightarrow B - A = C_B^A$

g) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

h) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

i) $A' - B' = A - B$

j) $A' - B' = B - A$

k) $A - B = A \cap B'$

l) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

2.25) Dê o valor V ou F:

a) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$

b) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}^*_-$

c) $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$

d) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \varnothing$

e) $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_-$

f) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$

g) $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{Z}_-$ são disjuntos

h) $\mathbb{Z}^*_+$ e $\mathbb{Z}^*_-$ são disjuntos

2.14 – NÚMERO DE ELEMENTOS

Dado um conjunto finito A, indicamos o número de elementos de A por n_A. Assim, por exemplo, se A = {2; 3; 7; 9} temos: $n(A) = 4$.

Outra notação para $n(A)$ é #A. Assim, no exemplo anterior temos: #A = 4.

Exemplos

a) A = {1; 2; 3}	$n(A) = 3$	#A = 3
b) B = {7; 9}	$n(B) = 2$	#B = 2
c) C = {8}	$n(C) = 1$	#C = 1
d) $D = \varnothing$	$n(D) = 0$	#D = 0

Exemplo

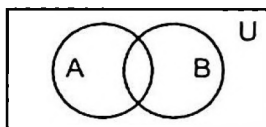
Sejam A = {3; 4; 5; 6; 7} e B = {6; 7; 8; 9}

Temos: $A \cup B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$A \cap B = \{6; 7\}$

Portanto: $n(A \cup B) = 7$ e $n(A \cap B) = 2$.

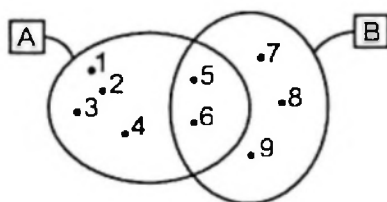
Consideremos os conjuntos finitos **A** e **B**, ambos subconjuntos de U. É fácil verificar (analisando o diagrama) que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo

Sejam A = {1; 2; 3; 4; 5; 6} e B = {5; 6; 7; 8; 9}
$A \cup B$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}
$A \cap B$ = {5; 6}
$n(A) = 6$

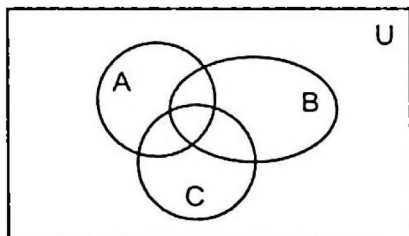
$n(B) = 5$

$n(A \cup B) = 9$

$n(A \cap B) = 2$

Tomemos a sentença $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Fazendo as substituições, temos: 9 = 6 + 5 – 2, que é obviamente verdadeira.
Para o caso em que $A \cap B = \varnothing$ (isto é, A e B são disjuntos) temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Consideremos agora os conjuntos A, B e C, todos eles subconjuntos de U. É fácil verificar, pela análise do diagrama, que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

2.26) Sendo $n(A \cup B) = 38$, $n(A \cap B) = 12$ e $n(B) = 15$, calcule $n(A)$.

Solução:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$38 = n(A) + 15 - 12$$

$$n(A) = 35$$

2.27) Em uma escola os alunos devem estudar uma língua que pode ser o francês ou o inglês. Se quiserem poderão estudar as duas. Sabendo que:

- há 200 alunos estudando francês.
- há 130 alunos estudando inglês.
- o total de alunos da escola é 300.

determine quantos alunos estudam francês e inglês.

Solução:

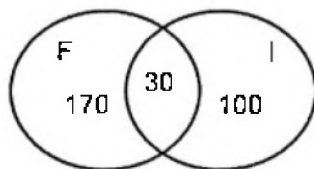
Sendo: I = conjunto dos estudantes de inglês.
F = conjunto dos estudantes de francês.

Temos: $n(I) = 130$, $n(F) = 200$, $n(I \cup F) = 300$

$$n(I \cup F) = n(I) + n(F) - n(I \cap F)$$

$$300 = 130 + 200 - n(I \cap F)$$

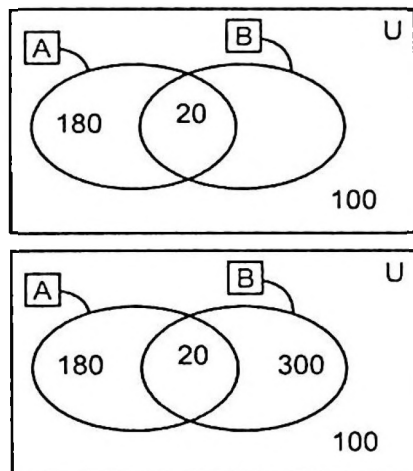
$$n(I \cap F) = 30$$

Portanto há 30 alunos estudando francês e inglês. Levando em conta que o total dos que estudam francês é 200, concluímos que os que estudam *apenas* francês são em número de 170 (isto é, 200 – 30).
Lembrando que o total de estudantes de inglês é 130, concluímos que há 100 que estudam *apenas* inglês.

2.28) Em uma escola, cujo total de alunos é 600, foi feita uma pesquisa sobre os refrigerantes que os alunos costumam beber. Os resultados foram:

- 200 alunos bebem o refrigerante A
- 20 alunos bebem o refrigerante A e o refrigerante B
- 100 alunos não bebem A nem B.

a) Quantos bebem apenas o refrigerante A?

b) Quantos bebem apenas o refrigerante B?
c) Quantos bebem B?
d) Quantos bebem A ou B?

Solução:

Na maioria dos casos é mais fácil analisar problemas deste tipo através dos diagramas e não através da fórmula. Seja U o conjunto de todos os alunos da escola. Há 100 alunos que não estão no conjunto A nem em B. Há 20 alunos que estão ao mesmo tempo em A e em B. Como o total de alunos de A é 200, concluímos que o número de alunos que bebem apenas o refrigerante A é: 200 – 20 = 180.
O total de alunos da escola é 600 e portanto, descontando os 100 que não estão em A nem em B, temos que $n(A \cup B) = 500$. Como o conjunto A tem 200 elementos, o número de elementos que estão apenas em B é: 500 – 200 = 300.
Portanto, podemos dar as respostas:
a) 180
b) 300
c) 320
d) 500

Exercícios Propostos

2.29) Sabendo que $n(A) = 47$, $n(B) = 30$ e $n(A \cup B) = 60$, determine:

a) $n(A \cap B)$

b) $n(A - B)$

c) $n(B - A)$

2.30) Sejam A, B e C conjuntos finitos. Sabe-se que $n(A \cap B \cap C) = 8$, $n(A \cap B) = 15$, $n(A \cap C) = 20$, $n(B \cap C) = 24$, $n(C) = 50$, $n(B) = 60$ e $n(A \cup B \cup C) = 129$. Determine:

a) $n(A)$

b) $n(B - A)$

c) $n(C - A)$

d) $n(A - B)$

e) $n[(A \cap B) - C]$

f) $n(A \cup C)$

2.31) Os conjuntos A e B são ambos finitos e subconjuntos de U. Sabe-se que $n(A) = 30$, $n(B) = 36$, $n(U) = 68$, $n(A \cup B) = 50$. Determine:

a) $n(A \cap B)$

b) $n(A')$

c) $n(B')$

d) $n(B \cap A')$

2.32) Foi feita uma pesquisa entre 3.600 pessoas sobre os jornais que costumam ler e o resultado foi que:

- 1.100 lêem "O Diário"
- 1.300 lêem "O Estado"
- 1.500 lêem "A Folha"
- 300 lêem "O Diário" e "O Estado"
- 500 lêem "A Folha" e "O Estado"
- 400 lêem "A Folha" e "O Diário"
- 100 lêem "A Folha", "O Diário" e "O Estado"

a) Quantas pessoas lêem apenas "O Diário?
b) Quantas pessoas lêem apenas "O Estado"?
c) Quantas pessoas lêem apenas "O Estado" e "A Folha"?
d) Quantas pessoas não lêem nenhum dos três jornais?
e) Quantas pessoas lêem apenas um dos três jornais?
f) Quantas pessoas lêem mais de um dos três jornais?

2.33) Em uma escola, foi feita uma pesquisa entre os alunos para saber que revista costumam ler e o resultado foi que, dos alunos consultados:

- 40% lêem a revista "Olhe"
- 37% lêem a revista "Pois é"
- 17% lêem "Olhe" e "Pois é"

a) Quantos por cento não lêem nenhuma das duas?
b) Quantos por cento lêem apenas "Olhe"?
c) Quantos por cento lêem apenas uma das duas revistas?

2.15 – CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Pode acontecer que os elementos de um conjunto sejam também conjuntos.

Exemplo

Consideremos o conjunto: $A = \{\{3; 4\}, \{5; 6; 7\}, \{8\}\}$
Neste caso o conjunto A tem 3 elementos, que são os conjuntos:

$$\{3; 4\}, \{5; 6; 7\} \text{ e } \{8\}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\{3; 4\} \in A$$
$$\{5; 6; 7\} \in A$$
$$\{\{3; 4\}, \{5; 6; 7\}\} \subset A$$

Mas não podemos escrever:

$$\{3;4\} \subset A; \ 3 \in A; \ 8 \in A$$

2.16 – CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

Consideremos um conjunto finito A.

Chamamos de **conjunto das partes de A** o conjunto cujos elementos são *todos* os subconjuntos de A. O conjunto das partes de A é representado por:

$$\boxed{P(A)}$$

Exemplo

Seja $A = \{2; 5\}$. Os subconjuntos de A são:

$$\{2\}, \{5\}, \{2; 5\} \text{ e } \varnothing$$

Portanto:

$$P(A) = \{\{2\}, \{5\}, \{2; 5\}, \varnothing\}$$

Seja A um conjunto finito que possui n elementos. Pode-se demonstrar (com os recursos da Análise Combinatória) que o número de elementos de P(A) é igual a:

$$2^n$$

Assim, no exemplo acima, o conjunto A tem 2 elementos ($n = 2$) e portanto P(A) tem 2^2 elementos, isto é, 4 elementos.

Se tomarmos o conjunto $B = \{4; 7; 9\}$, que possui 3 elementos ($n = 3$), podemos afirmar que P(B) tem 2^3 elementos, isto é, 8 elementos.

Exercícios Resolvidos

2.34) Dado o conjunto: $A = \{\{2; 6\}, \{3; 4; 9\}, \{8\}\}$, dê o valor V ou F:

a) $\{2; 6\} \in A$ e) $2 \in A$ i) $\{\{2; 6\}, \{3; 4; 9\}\} \subset A$

b) $\{2; 6\} \subset A$ f) $8 \in A$ j) $\{\{2; 6\}\} \subset A$

c) $\{8\} \in A$ g) $\varnothing \subset A$
d) $\{8\} \subset A$ h) $\varnothing \in A$

Solução:

a) V
O conjunto {2, 6} é elemento de A: portanto podemos escrever: $\{2; 6\} \in A$;
b) F
Para que $\{2, 6\} \subset A$ fosse verdadeira, todos os elementos de {2; 6} deveriam ser também elementos de A. Mas acontece que 2 é elemento de {2; 6}, mas não é elemento de A, o mesmo acontecendo com o número 6.
c) V
d) F , ele pertence a A.
e) F
f) F
g) V , o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto
h) F, ele está contido, ele nao pertence.
i) V
j) V

2.35) Sendo $B = \{\{3; 4\}, \{1; 2; 5\}, \varnothing\}$ dê o valor V ou F:
a) $\varnothing \subset B$
b) $\varnothing \in B$
c) $\{3; 4\} \in B$
d) $\{\{3, 4\}, \{1; 2; 5\}\} \subset B$
e) $\{\{3, 4\}, \varnothing\} \subset B$

Solução:

a) V
b) V
c) V
d) V
e) V

2.36) Considere o conjunto $A = \{\varnothing\}$. Dê o valor V ou F:
a) $\varnothing \in A$ c) $\varnothing = \{ \varnothing \}$
b) $\varnothing \subset A$ d) A possui um elemento

Solução:

a) V
b) V
c) F
d) V

2.37) Seja $A = \{2; 3; 5\}$
a) Determine P(A).
b) Quantos elementos tem P(A)?

Solução:

a) P(A) = {{2}, {3}, {5}, {2; 3}, {2; 5}, {3; 5}, {2; 3; 5}, ∅}

b) A possui 3 elementos e portanto P(A) possui 2^3 elementos, isto é, 8 elementos, o que pode ser verificado acima.

Exercícios Propostos

2.38) Sendo A = {4; 6}, {1; 3; 5}, {9}} e B = {{8}, {3; 6}, ∅} dê o valor V ou F:

a) {4; 6} ∈ A
b) {4; 6} ⊂ A
c) 4 ∈ A
d) 9 ∈ A
e) {9} ⊂ A
f) {9} ∈ A
g) ∅ ⊂ A
h) ∅ ⊂ B
i) ∅ ∈ A
j) ∅ ∈ B
k) {{4; 6}, {1; 3; 5}} ⊂ A
l) {4; 6}} ⊂ A
m) {∅} ⊂ A
n) {∅} ⊂ B

2.39) Sendo A = {1; 2; 3; 5}, determine:

a) o número de subconjuntos de A.
b) o número de subconjuntos próprios de A.

2.17 – NÚMEROS REAIS

Além dos números naturais e dos números inteiros, devemos nos "lembrar" agora dos números racionais e dos reais.

O conjunto dos números racionais é simbolizado por $\mathbb{Q}$ e é definido como sendo o conjunto de todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ onde a $\in \mathbb{Z}$ e b $\in \mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Assim, por exemplo, são números racionais:

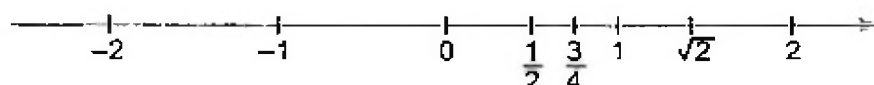
$$\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{-5}{9}, \frac{3}{1}$$

É fácil concluir que todo número inteiro é também racional. Por exemplo, o número inteiro 8 pode ser escrito como $\frac{8}{1}$ e portanto é racional. Podemos então escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Quanto aos números reais a definição é bem mais complicada e está além do nível do nosso curso. Para nós bastará lembrar que existe uma correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta:

A cada número real corresponde um único ponto da reta e a cada ponto da reta corresponde um único número real.

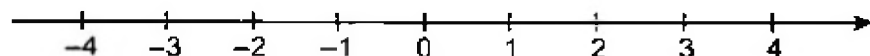
O conjunto dos reais é simbolizado por $\mathbb{R}$:

Todo número racional é também real, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Porém há números reais que não são racionais: são os números **irracionais**. Como exemplos de números irracionais podemos citar:

$$\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ -\sqrt{2};\ \pi;\ \frac{\pi}{4}$$

O conjunto dos irracionais não tem símbolo especial. Podemos representá-lo por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou então por $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$. Quando estiver convencionado que o universo é $\mathbb{R}$, poderemos representar os irracionais por $\mathbb{Q}'$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nos exercícios, há alguns números irracionais que aparecem com bastante frequência. Assim sendo, é interessante decorar seus valores *aproximados*. Esses casos estão relacionados no quadro abaixo.

$\sqrt{2} \cong 1,414$
$\sqrt{3} \cong 1,732$
$\sqrt{5} \cong 2,236$
$\pi \cong 3,14$

É importante também lembrar que dados dois números reais distintos, ao representá-los na reta, o maior fica à direita do menor. Assim, por exemplo, temos: $3 > 1$, $-3 < -1$, $0 > -4$, $1 > -4$.

Para os racionais e para os reais, temos notações análogas às adotadas para os naturais e os inteiros:

$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{Q}^*_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$\mathbb{Q}^*_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Outro fato importante a ressaltar é quanto ao uso das palavras **positivo** e **negativo**. Há duas maneiras diferentes de usar tais palavras.

1) Para alguns autores, os números *positivos* são aqueles que são *maiores que zero* e os *negativos* são os *menores que zero*. O número zero, para

esses autores, não é positivo nem negativo. Assim, dentro desta convenção temos:

$\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais negativos.

2) Para outros autores, a convenção é a seguinte:

$\mathbb{R}_+$ = conjunto dos números reais *positivos*.

$\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais *estritamente positivos*

$\mathbb{R}_-$ = conjunto dos números reais *negativos*.

$\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais *estritamente negativos*.

Portanto, para estes autores, o número zero é ao mesmo tempo *positivo* e *negativo*, porém não é *estritamente positivo* nem *estritamente negativo*.

Nós adotaremos a primeira convenção, isto é, ao longo deste livro vale

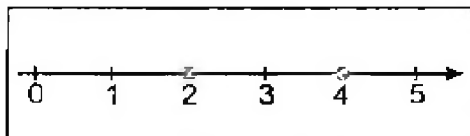
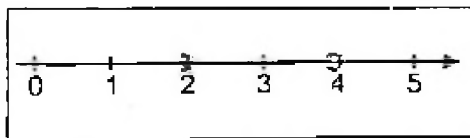
$\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais negativos.

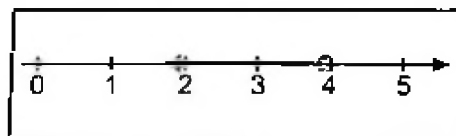
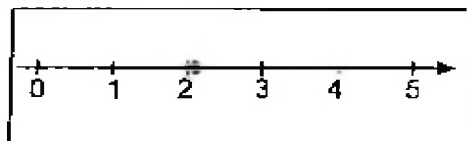
2.18 – INTERVALOS

Há alguns subconjuntos dos números reais que recebem o nome de intervalo.

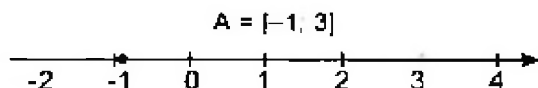
Intervalos Finitos

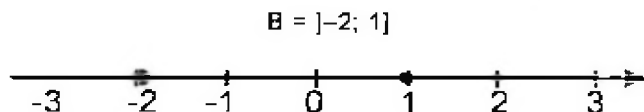
Consideremos o conjunto A = $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Esse conjunto pode ser representado como no diagrama abaixo. Diremos que o conjunto A é um *intervalo fechado* de *extremidades* 2 e 4 e podemos representá-lo por A = [2; 4].

Consideremos agora o conjunto B = $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$. Podemos representar esse conjunto na reta, como no diagrama abaixo. As meias-luas servem para indicar que os números 2 e 4 não fazem parte do conjunto. Diremos que o conjunto B é um *intervalo aberto* de *extremidades* 2 e 4 e podemos representá-lo por B =]2; 4[.

Vemos então que um intervalo fechado inclui as extremidades, enquanto que um intervalo aberto não inclui as extremidades.

Tomemos o conjunto C = $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$. Neste caso, temos $2 \in C$ e $4 \notin C$. Podemos representar na reta o conjunto C pelo diagrama abaixo. A meia-lua indica que o número 4 não está incluído. Diremos que o conjunto C é um

intervalo *fechado à esquerda* e *aberto à direita* de extremidades 2 e 4. Podemos dizer também que o conjunto C é um intervalo *fechado-aberto* de extremidades 2 e 4. O conjunto C pode ser representado por C = [2; 4[.

Seja o conjunto D = {x ∈ ℝ | 2 < x ≤ 4}. Temos agora um intervalo *aberto à esquerda* e *fechado à direita* de extremidades 2 e 4. Podemos também dizer que D é um intervalo *aberto-fechado* de extremidades 2 e 4. A representação de D é D =]2; 4].

xemplos

a) O conjunto A = {x ∈ ℝ | −1 ≤ x ≤ 3} é um intervalo fechado de extremos −1 e 3.

A = [−1; 3]

b) O conjunto B = {x ∈ ℝ | −2 < x ≤ 1} é um intervalo aberto-fechado de extremos −2 e 1. Podemos dizer também que é um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos −2 e 1.

B =]−2; 1]

Os intervalos aberto-fechado e fechado-aberto costumam ser chamados também de semi-abertos (ou semi-fechados).

Intervalos Infinitos

Seja a número real qualquer.

Intervalos infinitos são conjuntos dos tipos:

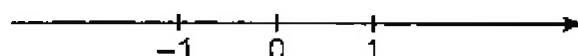
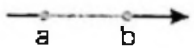
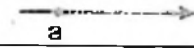
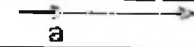
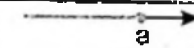
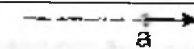
A = {x ∈ ℝ | x ≤ a} C = {x ∈ ℝ | x ≥ a}

B = {x ∈ ℝ | x < a} D = {x ∈ ℝ | x > a}

Estes conjuntos podem ser representados dos seguintes modos:

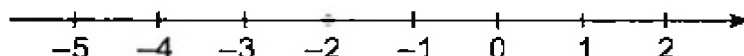
$A =]-\infty; a]$ $B =]-\infty; a[$ $C = [a; +\infty[$ $D =]a; +\infty[$

Em particular, podemos dizer que o conjunto dos reais é um intervalo infinito:

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

O símbolo $+\infty$ lê-se "mais infinito" e o símbolo $-\infty$ lê-se "menos infinito".

Exemplo

O conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$ é um intervalo infinito que pode ser representado por:

$$M = [-2; +\infty[$$

Resumo

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Temos então:

Subconjunto de $\mathbb{R}$	Representação na reta real	Nomenclatura	Notação de intervalo
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	a b	Intervalo fechado de extremos a e b	$[a; b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	a b	Intervalo aberto de extremos a e b	$]a; b[$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	a b	Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita; seus extremos são a e b	$[a; b[$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	a b	Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita; seus extremos são a e b	$]a; b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	a	Intervalo infinito	$[a; +\infty[$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	a	Intervalo infinito	$]a; +\infty[$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	a	Intervalo infinito	$]-\infty; a]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	a	Intervalo infinito	$]-\infty; a[$

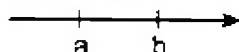
Observações:

1) Alguns autores, para representar os intervalos $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, usam, respectivamente, as notações:

$$[a; b), (a; b], (a; b)$$

Porém preferimos não usar essas notações, pois – no caso $(a; b)$ – pode haver confusão com par ordenado.

2) Embora tenham pouco interesse, há alguns casos que devem ser mencionados. Se $a < b$, então temos:

a b

$[b; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid b \leq x \leq a\} = \varnothing$

$]b; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid b < x < a\} = \varnothing$

$]a; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\} = \varnothing$

$[a; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq a\} = \{a\}$

Exercícios Resolvidos

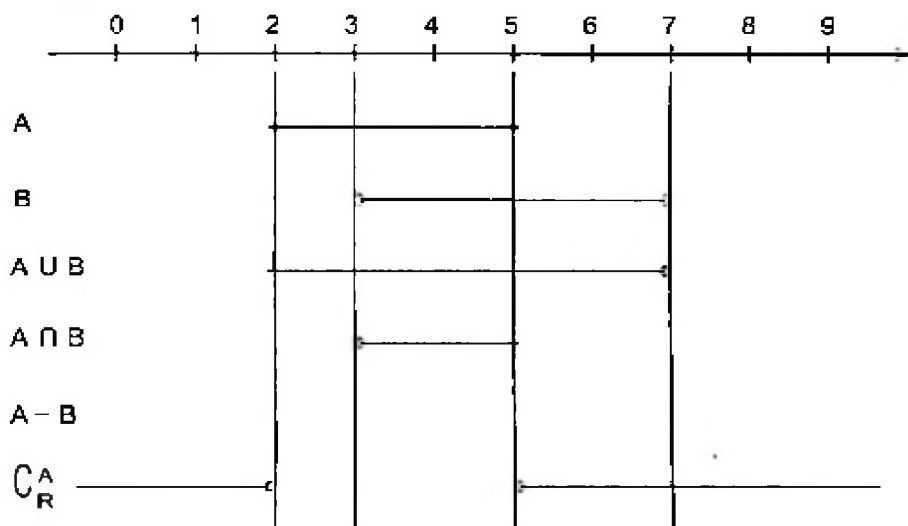
2.40) Sendo A = [2; 5] e B =]3; 7[determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $C_{\mathbb{R}}^{A}$

Solução:

a) $A \cup B = [2; 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$

b) $A \cap B =]3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

c) $A - B = [2; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

d) $C_{\mathbb{R}}^{A} =]-\infty; 2[\cup]5; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

Exercícios Propostos

2.41) Dê o valor V ou F:

a) $5 \in \mathbb{N}$

b) $7 \in \mathbb{N}$

c) $7 \in \mathbb{Z}$

d) $7 \in \mathbb{Q}$

e) $7 \in \mathbb{R}$

f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

g) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$

h) $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$

i) $\pi \in \mathbb{Z}$

j) $\pi \in \mathbb{R}$

k) $0 \in \mathbb{R}$

l) $\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$

m) $-3 \in \mathbb{R}_-$

n) $0 \in \mathbb{R}_-$

o) $0 \in \mathbb{R}^*_-$

p) $\frac{-\sqrt{3}}{5} \in \mathbb{R}_+$

2.42) Determine:

a) $[4; 7] \cup [6; 9]$
b) $[4; 7] \cap [6; 9]$
c) $]3; 6[\cup [4; 10[$
d) $[-3; \infty[\cap [-6; 2]$
e) $]7; 11[- [-4; 9]$

2.43) Sejam:

$A = \{x \in \Re \mid -3 \leq x < 1\}$ $\quad B = [-1; 2[$ $\quad C =]-2; \frac{5}{4}[$

Determine:

a) $[A \cap B \cap C]$
b) $[(A - B) \cup C]$
e) $[(A \cap B) - C]$
d) $[B \cap C]$

2.44) Dados: $A = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$, $B = \left[-2; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $C = \left]-1; \frac{3}{4}\right]$, determine:

a) $[A \cap B \cap C]$
b) $[(A \cap B) - C]$

Exercícios Suplementares

I.1) Sendo $U = \{(0; -1); (-1; -4); (2; 3); (-2; 4)\}$, dê o conjunto-verdade da sentença aberta:
$3x - y = 1$

I.2) Construa a tabela-verdade da sentença:
$\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim r)$

I.3) Sendo $A = \left[\frac{-49}{10}; 1\right[$, $B = \left]\frac{-\sqrt{2}}{3}; \pi\right[$ e $C = [2; +\infty[$, determine:

a) $A - B$ $\qquad$ b) $B - A$ $\qquad$ c) $A \cap B \cap C$

I.4) Sejam A, B e C subconjuntos de U, tais que:

$n(U) = 52$

$n(A \cap C) = 8$

$n(A) = 20$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

$n(B \cap C) = 9$

$n(A \cup B \cup C) = 45$

$n(A \cap B) = 7$

$n(B - A) = 15$

Determine:

a) $n(B)$

b) $n(C)$

c) $n(A \cup B)$

d) $n[U - (A \cup B \cup C)]$

PARTE II

Capítulo 3 – **Equações**

Capítulo 4 – **Inequações**

Equações

3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste capítulo é o estudo das equações do 1º grau e 2º grau com uma variável e as equações que se reduzem a elas. Porém trataremos também, de modo rápido, dos sistemas de equações com mais de uma variável.

No caso de equações, é costume chamar as variáveis de **incógnitas** e os valores que satisfazem as equações, de **raízes**.

Resolver uma equação significa determinar o seu **conjunto-verdade**, isto é, o conjunto de suas raízes.

Como vimos no capítulo 1, o conjunto-verdade depende do universo quando nada for mencionado, adotaremos $U = \mathbb{R}$.

3.2 – ALGUMAS PROPRIEDADES DA IGUALDADE

$$P_1 \quad \boxed{a = b \Leftrightarrow a + m = b + m} \quad \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall b \in \mathbb{R} \\ \forall m \in \mathbb{R} \end{array}$$

Esta propriedade nos diz que podemos somar (ou subtrair) um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtendo uma sentença equivalente.

É com base nesta propriedade que podemos "passar" um termo de "um lado para outro" de uma igualdade, desde que troquemos seu sinal.

Exemplo

Consideremos a sentença aberta: $x + 5 = 7$. Vamos somar aos dois membros o número -5:

$$x + 5 - 5 = 7 - 5$$

obtendo então:

$$x = 7 - 5$$

Temos, portanto:

$$x + 5 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 5$$

$$P_2 \quad \boxed{\begin{array}{l} a = b \Leftrightarrow am = bm \\ a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{m} \end{array}} \quad \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall b \in \mathbb{R} \\ \forall m \in \mathbb{R}^* \end{array}$$

De acordo com esta propriedade, podemos multiplicar (ou dividir) ambos os membros de uma igualdade por um número diferente de zero, obtendo uma sentença equivalente.

Exemplo

Consideremos a sentença: $3x = 12$. Vamos dividir os dois membros por 3 obtendo: $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$, isto é, $x = \frac{12}{3}$.

Portanto:

$$3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3}$$

Exemplo

Observe que a implicação: $a = b \Rightarrow a \cdot (0) = b \cdot (0)$ é verdadeira. Porém a implicação $a \cdot (0) = b \cdot (0) \Rightarrow a = b$ não é verdadeira, pois poderíamos ter, por exemplo:

$$\underbrace{7 \cdot (0) = 5 \cdot (0)}_{\text{verdadeira}} \Rightarrow \underbrace{7 = 5}_{\text{falsa}}$$

que é obviamente falsa.

Por este exemplo percebemos a necessidade de se impor $m \neq 0$ (isto é, $m \in \mathbb{R}^*$) no enunciado da propriedade P_2.

3.3 – EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA

"Equação do primeiro grau com uma incógnita" é uma equação que pode ser reduzida à forma:

$$\boxed{ax + b = 0} \quad (a \neq 0)$$

onde: x é a incógnita.
a e b são constantes denominadas coeficientes
b é o termo independente.

A determinação do conjunto-verdade de uma equação do primeiro grau é feita através da aplicação direta das propriedades P_1 e P_2 vistas acima.

Exercícios Resolvidos

3.1) Resolva a equação: $4x + 20 = 0$

Solução:

$$4x + 20 = 0 \overset{P_1}{\longleftrightarrow} 4x = -20 \overset{P_2}{\longleftrightarrow} x = -\frac{20}{4} = -5$$

Portanto, o conjunto-verdade é:

$$V = \{-5\}$$

3.2) Resolva a equação: $5x - 9 = 8x + 16$

Solução:

$$5x - 9 = 8x + 16 \overset{P_1}{\longleftrightarrow} 5x - 8x = 16 + 9 \Leftrightarrow -3x = 25 \overset{P_2}{\longleftrightarrow} x = \frac{25}{-3}$$

Portanto:

$$V = \left\{-\frac{25}{3}\right\}$$

3.3) Resolva a equação: $3x - 2 = 4x + 9$

Solução:

$3x - 2 = 4x + 9 \xleftrightarrow{P_1} 3x - 4x = 9 + 2 \Leftrightarrow -x = 11 \xleftrightarrow{P_2} x = -11$

Assim:

$$V = \{-11\}$$

3.4) Resolva a equação: $\frac{3x}{2} - 4 = 5x + \frac{2}{3}$

Solução:

O mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores é 6. Vamos então multiplicar os dois membros da igualdade por 6:

$$6\left(\frac{3x}{2} - 4\right) = 6\left(5x + \frac{2}{3}\right)$$

$$9x - 24 = 30x + 4$$

Portanto:

$\frac{3x}{2} - 4 = 5x + \frac{2}{3} \xleftrightarrow{P_2} 9x - 24 = 30x + 4 \xleftrightarrow{P_1} 9x - 30x = 24 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21x = 28 \xleftrightarrow{P_2} x = \frac{28}{-21} = -\frac{4}{3}$

Portanto, o conjunto-verdade é: $V = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

3.5) Considere a equação $3x - m = 13$, onde x é a incógnita. Determine o valor de m sabendo que a raiz da equação é -4.

Solução:

Se -4 é a raiz da equação, ao substituirmos x por -4 deveremos obter uma sentença verdadeira:

$$3(-4) - m = 13$$
$$-12 - m = 13$$
$$m = -25$$

3.6) Resolva as equações:

a) $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7$

b) $12x - 7 = 3(5x + 2) - 3x + 9$

Solução:

a) $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7 \Leftrightarrow 4x + 1 = 4x - 6 + 7 \Leftrightarrow 4x - 4x = -6 + 7 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$

Assim $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7 \Leftrightarrow 0 = 0$

Como a sentença "0 = 0" é verdadeira para qualquer valor de x (isto é, é independente de x), a equação fornecida será satisfeita para qualquer valor de x. Portanto, o conjunto-verdade é igual ao universo:

$$V = \mathbb{R}$$

e a sentença aberta: $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

b) $12x - 7 = 3(5x + 2) - 3x + 9 \Leftrightarrow 12x - 7 = 15x + 6 - 3x + 9 \Leftrightarrow$
$12x - 15x + 3x = 6 + 9 + 7 \Leftrightarrow 0 = 22$

Como a sentença "0 = 22" é falsa (é falsa para qualquer valor de x), então a equação fornecida não será satisfeita para nenhum valor de x. Podemos dizer que a equação não tem solução:

$$V = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.7) Resolva as equações:

a) $4x - 3 = -2x + 15$

b) $4(x - 5) + 3x + 1 = 2(x - 2) + 15(x - 3)$

c) $\dfrac{x-7}{5} + 2 = \dfrac{x+8}{10}$

d) $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{4x-1}{6} + \dfrac{x}{2}$

3.8) Resolva as equações:

a) $\dfrac{3x-1}{3} = \dfrac{2x+5}{2}$ b) $\dfrac{3(2x+1)}{2} = 3x + \dfrac{3}{2}$

3.9) Considere a equação: $2x = m - 1$, onde x é a incógnita. Sabendo que seu conjunto-solução é $S = \{-7\}$, determine o valor de m.

3.4 – CONJUNTO-VERDADE DE SENTENÇAS ABERTAS MOLECULARES

Seja S_1 uma sentença aberta cujo conjunto-verdade é V_1 e seja S_2 uma outra sentença aberta de conjunto-verdade V_2. Temos então:

a) O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$S_1 \wedge S_2$$

é: $V = V_1 \cap V_2$

b) O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$S_1 \vee S_2$$

é: $V = V_1 \cup V_2$

Exemplo

Sendo U = N, considere as sentenças abertas:

$S_1: x > 5$

$S_2: x < 9$

O conjunto-verdade de s_1 é: $V_1 = \{6; 7; 8; 9; 10; ...\}$ e o conjunto-verdade de S_2 é: $V_2 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Consideremos agora a sentença aberta $S_1 \wedge S_2$, isto é,

$$x > 5 \wedge x < 9$$

Seu conjunto-verdade é: $V = V_1 \cap V_2 = \{6; 7; 8\}$

Se tomarmos a sentença aberta: $S_1 \vee S_2$, isto é,

$$x > 5 \vee x < 9$$

seu conjunto-verdade será: $V = V_1 \cup V_2 = \{0; 1; 2; ...\} = N$

O que dissemos acima para duas sentenças abertas pode ser generalizado para três ou mais sentenças abertas. Por exemplo, consideremos as sentenças abertas S_1, S_2 e S_3 cujos conjuntos-verdade são respectivamente V_1, V_2 e V_3. O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$$

é $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$

O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$S_1 \vee S_2 \vee S_3$$

é $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$

Exercicios Resolvidos

3.10) Sendo U = N dê os conjuntos-verdade das sentenças abertas:

a) $2x - 8 = 0 \vee 5x - 15 = 0$ b) $x < 7 \wedge 3x - 27 = 0$

Solução:

a) $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ $V_1 = \{4\}$

$5x - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$ $V_2 = \{3\}$

O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$2x - 8 = 0 \vee 5x - 15 = 0$$

é: $V = V_1 \cup V_2 = \{3; 4\}$

b) O conjunto-verdade de: $x < 7$ é: $V_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e o conjunto-verdade de: $3x - 27 = 0$ é: $V_2 = \{9\}$. Assim o conjunto-verdade de $x < 7 \wedge 3x - 27 = 0$ é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

3.11) Sendo $U = \mathbb{R}$, dê o conjunto-verdade da sentença aberta:

$$4x + 1 = 5x - 2 \wedge x - 3 \neq 0$$

Solução:

$4x + 1 = 5x - 2 \Leftrightarrow x = 3$ $\qquad V_1 = \{3\}$

$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ $\qquad V_2 = \mathbb{R} - \{3\}$

O conjunto-verdade de "$4x + 1 = 5x - 2 \wedge x - 3 \neq 0$" é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

3.12) Resolva a equação $\dfrac{4}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{4}{3(x - 1)}$

Solução:

Neste caso (há incógnita no denominador) devemos garantir que nenhum dos denominadores se anule. Portanto, devemos ter:

$$x^2 - 1 \neq 0 \text{ e } x + 1 \neq 0 \text{ e } 3(x - 1) \neq 0$$

Porém:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \\ 3(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

Supondo então que os denominadores não se anulem, vamos simplificar a equação proposta. Lembrando do produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

podemos escrever:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$$

e assim constatamos que $x^2 - 1$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 1)$. Portanto, o mmc dos denominadores é $3(x^2 - 1)$. Agora dividimos o mmc por cada denominador e multiplicamos o resultado obtido pelo numerador obtendo:

$$12 = 9(x - 1) - 4(x + 1)$$

Assim:

$$\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{3}{x + 1} - \frac{4}{3(x - 1)} \Leftrightarrow 12 = 9(x - 1) - 4(x + 1) \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

Mas: $12 = 9(x - 1) - 4(x + 1) \Leftrightarrow x = 5$

O valor 5 satisfaz todas as condições e, portanto:

$$V = \{5\}$$

3.13) Resolva a equação $\frac{7}{x-2} = \frac{3}{-6x+12}$

Solução:

Neste caso devemos ter: $x - 2 \neq 0$ e $-6x + 12 \neq 0$

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ -6x+12 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

Assim:

$$\frac{7}{x-2} = \frac{3}{-6x+12} \Leftrightarrow 7(-6x+12) = 3(x-2) \wedge x \neq 2$$

$$\begin{cases} x \neq 2 & V_1 = \mathbb{R} - \{2\} \\ 7(-6x+12) = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 2 & V_2 = \{2\} \end{cases}$$

O conjunto-verdade da equação proposta é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.14) Sendo $U = \mathbb{R}$ dê os conjuntos-verdade das sentenças abertas:

a) $3x + 8 = 0 \vee 5x - 9 = 0$
b) $2x - 3 = 0 \vee 4x - 20 = 0 \vee 7x - 1 = 20$
c) $3x + 7 = 6x - 8 \wedge x - 5 \neq 0$
d) $4x + 1 = 6x - 19 \wedge x - 3 \neq 0$

3.15) Dê o conjunto-verdade da sentença aberta:

$$(x - 4 = 0 \vee 3x - 15 = 0 \vee 4x - 28 = 0) \wedge (x \neq 5)$$

3.16) Resolva as equações:

a) $\frac{5}{x} = 4 - \frac{3x-5}{x}$

b) $\frac{6}{5x} = \frac{2}{x+4}$

c) $3 + \frac{7}{x-5} = \frac{2x+1}{x-5}$

d) $13 - \frac{2}{x+2} = \frac{4x+6}{x+2}$

e) $\frac{3}{x-6} = \frac{1}{2x-4}$

3.5 – PROPRIEDADES

Sabemos que:

$$P_3 \quad \boxed{\begin{array}{l} a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \\ \dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \end{array}}$$

Baseados nisso, podemos resolver equações dos tipos que aparecem a seguir.

Exercicios Resolvidos

3.17) Resolva a equação: $(2x - 3)(7 - 8x) = 0$

Solução:

$(2x - 3)(7 - 8x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ou $7 - 8x = 0$

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ 7 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{8} \end{array} \right.$$

Portanto: $V = \left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{8}\right\}$

3.18) Resolva a equação: $2x^3 - 18x + 3x^2 - 27 = 0$

Solução:

Em primeiro lugar fatoremos a expressão $2x^3 - 18x + 3x^2 x^2 - 27$:

$$\underline{2x^3 - 18x} + \underline{3x^2 - 27} = 2x(x^2 - 9) + 3(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(2x + 3) =$$

$$= (x^2 - 3^2)(2x + 3) = (x + 3)(x - 3)(2x + 3)$$

Portanto:

$2x^3 - 18x + 3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0 \vee 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -\dfrac{3}{2}$

$$V = \left\{3; -3; -\frac{3}{2}\right\}$$

3.19) Resolva a equação: $x^3 - x = 0$

Solução:

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$

$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

$$V = \{0; -1; 1\}$$

3.20) Resolva a equação: $\frac{5x+20}{x^2-16}=0$

Solução:

$$\frac{5x+20}{x^2-16}=0 \Leftrightarrow 5x+20=0 \wedge x^2-16 \neq 0$$

A raiz de $5x + 20 = 0$ é -4. Porém esse valor não satisfaz a condição $x^2 - 16 \neq 0$ e portanto o conjunto-verdade da equação dada é:

$$V = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.21) Resolva as equações.

a) $x(x + 1) = 0$

b) $2(-2x + 3)(4 - x)(x + 9) = 0$

c) $\frac{7x-4}{4x-20}=0$

d) $\frac{4x+12}{x^2-9}=0$

e) $x^3 - 16x = 0$

f) $4x^3 + 5x^2 - 4x - 5 = 0$

3.22) Resolva a equação $(2x + 1)(4 - 2x)(x - \pi) = 0$ em cada um dos universos:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Z}$

3.6 – EQUAÇÕES DO TIPO $a^k = b^k$

Consideremos a igualdade: $a^k = b^k$ onde a e b são reais e $k \in \mathbb{Z}^*_+$.

Se k é par, temos:
$a^k = b^k \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
Se k é ímpar, temos:
$a^k = b^k \Leftrightarrow a = b$

Exemplos

a) Consideremos a equação: $x^2 = 4^2$. Temos:
$x^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x - 4$
Portanto: $V = \{4; -4\}$

b) Seja a equação: $x^3 = 4^3$. Neste caso, temos:
$x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4$
e portanto: $V = \{4\}$

As propriedades mencionadas acima valem também para $k \in \mathbb{Z}^*_-$, desde que imponhamos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois devemos nos lembrar que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplo

Seja a equação $(4x - 12)^{-5} = (3 - x)^{-5}$

$(4x - 12)^{-5} = (3 - x)^{-5} \Leftrightarrow 4x - 12 = 3 - x \wedge 4x - 12 \neq 0 \wedge 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow$

$x = 3 \wedge x \neq 3$

Portanto: $V = \varnothing$

Se $k = 0$, então o conjunto-verdade da equação $a^k = b^k$ coincide com o conjunto-universo, pois qualquer número real elevado a zero é igual a 1.

Exemplo

Consideremos a equação: $(3x - 2)^0 = (4 - 3x)^0$

Se $U = \mathbb{R}$, teremos:

$$V = \mathbb{R}$$

Exercício Resolvido

3.23) Resolva as equações:

a) $(4x - 7)^{12} = (8 - x)^{12}$ b) $(2x + 12)^{15} = (6x - 9)^{15}$

Solução:

a) $(4x - 7)^{12} = (8 - x)^{12} \Leftrightarrow 4x - 7 = 8 - x \vee 4x - 7 = -(8 - x) \Leftrightarrow$

$x = 3 \vee x = \frac{-1}{3}$

$$V = \left\{3; \frac{-1}{3}\right\}$$

b) $(2x + 12)^{15} = (6x - 9)^{15} \Leftrightarrow 2x + 12 = 6x - 9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{4}$

$$V = \left\{\frac{21}{4}\right\}$$

Exercício Proposto

3.24) Resolva as equações:

a) $(3x - 1)^{18} = (4 - 5x)^{18}$ c) $(3x + 2)^{-4} = (x - 1)^{-4}$

b) $(2x + 9)^7 = (7x - 1)^7$ d) $(6x - 9)^2 = 16$

3.7 – EQUAÇÕES LITERAIS

Às vezes ocorrem equações com várias letras, onde nem todas são consideradas como variáveis: algumas são consideradas como números (constantes) e nesse caso costumam ser chamadas de **parâmetros**

Ao ser dada uma equação literal, se nada for esclarecido, admite-se que as últimas letras do alfabeto são as variáveis e as primeiras são as constantes (parâmetros).

Exercícios Resolvidos

3.25) Resolva a equação: $2x - a = 3b$

Solução:

Aqui, como nada é esclarecido, vamos admitir que x é a variável, a e b são constantes. Portanto, temos:

$$2x - a = 3b \Leftrightarrow 2x = 3b + a \Leftrightarrow x = \frac{3b+a}{2}$$

Assim: $V = \left\{\frac{3b+a}{2}\right\}$

3.26) Resolva a equação: $ax - x = 3a + 2$

Solução:

Observando que: $ax - x = (a-1)x$, temos:

$ax - x = 3a + 2 \Leftrightarrow (a-1)x = 3a + 2$

Neste ponto consideraremos duas possibilidades: primeiro $a - 1 \neq 0$ e depois $a - 1 = 0$

1º) para $a - 1 \neq 0$, temos:

$$(a-1)x = 3a+2 \Leftrightarrow x = \frac{3a+2}{a-1}$$

e $V = \left\{\frac{3a+2}{a-1}\right\}$

2º) para $a - 1 = 0$, teremos $a = 1$ e portanto a equação dada transforma-se em:

$$0x = 3(1) + 2$$
$$0 \cdot x = 5$$

que obviamente não tem solução.

Portanto, a resposta do exercício deve ser:

$$\begin{cases} \text{para } a-1 \neq 0, \text{ temos: } V = \left\{\frac{3a+2}{a-1}\right\} \\ \text{para } a-1 = 0, \text{ temos: } V = \varnothing \end{cases}$$

3.27) Resolva a equação $ax - x = a^2 - 1$

Solução:

$ax - x = a^2 - 1 \Leftrightarrow (a-1)x = a^2 - 1$

Consideremos duas possibilidades:

1º) para $a - 1 \neq 0$, vem:

$$(a-1)x = a^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{a^2-1}{a-1} \Leftrightarrow x = \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \Leftrightarrow x = a+1$$

2º) para $a - 1 = 0$, vem $a = 1$ e a equação $(a-1)x = a^2 - 1$ transforma-se em: $0 \cdot x = 0$ que obviamente é verdadeira para todo x.

Assim, a resposta é:

$$\begin{cases} \text{para } a - 1 \neq 0,\ V = \{a+1\} \\ \text{para } a - 1 = 0,\ V = \mathbb{R} \end{cases}$$

3.28) Resolva a equação $ax - x = b - 3$

Solução:

$ax - x = b - 3 \Leftrightarrow (a-1)x = b - 3$

1º) para $a - 1 \neq 0$, isto é, para: $a \neq 1$, temos:

$$(a-1)x = b - 3 \Leftrightarrow x = \frac{b-3}{a-1}$$

2º) para $a - 1 = 0$ e $b - 3 = 0$, isto é, para $a = 1$ e $b = 3$ a equação:

$$(a-1)x = b - 3$$

transforma-se em:

$$0x = 0$$

e portanto $V = \mathbb{R}$

3º) para $a - 1 = 0$ e $b - 3 \neq 0$, isto é, para $a = 1$ e $b \neq 3$, a equação:

$$(a-1)x = b - 3$$

transforma-se em:

$$0x = b - 3 \ (\text{com } b - 3 \neq 0)$$

que, obviamente, é uma equação impossível.

Portanto, a nossa resposta é:

$$\begin{cases} \text{para } a \neq 1,\ V = \left\{\frac{b-3}{a-1}\right\} \\ \text{para } a = 1 \text{ e } b \neq 3,\ V = \emptyset \\ \text{para } a = 1 \text{ e } b = 3,\ V = \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercícios Propostos

3.29) Resolva as equações.

a) $4x - a = -x + b$

b) $ax - 5 = 2x + 10$

c) $ax - x = 4a + 1$

d) $3x - 8 = 2b + ax$

3.8 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Um sistema de equações é uma sentença aberta molecular, onde os átomos são ligados pelos conectivos $\wedge$ ou $\vee$.

Exemplos

a) A sentença aberta molecular "$4x - 2y = 7 \vee x + 2y = 1$" é um sistema de equações, que costuma ser escrito também do seguinte modo:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ \quad\vee \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

b) A sentença aberta molecular "$x^2 - 3y = 9 \wedge 4x + y = 10$" é um sistema de equações que pode também ser escrito assim:

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 9 \\ \quad\wedge \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

Quando é omitido o conectivo, admite-se que é o conectivo $\wedge$. Assim, exemplo, se encontrarmos o sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = 9 \\ 5x + 9y = 1 \end{cases}$$

admitiremos que se trata de "$4x^2 - 3y = 9 \wedge 5x + 9y = 1$"

No caso em que o conectivo é $\wedge$ costuma-se dizer que se trata de um "sistema de equações simultâneas", que é o caso que nos interessa neste livro.

O estudo dos sistemas de equações em que o conectivo é $\vee$ é um tanto mais complicado e é feito com auxílio dos gráficos no nosso volume de Geometria Analítica, desta mesma coleção.

3.9 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES SIMULTÂNEAS

Uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

chama-se equação linear. Aqui, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis.

Note que, numa equação linear, cada termo contém uma incógnita elevada ao expoente um.

Exemplo

As equações "$4x - 3y = 1$" e "$3x - 9y + 10z = 8$" são equações lineares.

Contra-exemplo

A equação "$3x^2 - 9y = 2$" não é linear, pois temos a incógnita x elevada a expoente dois. A equação "$\frac{5}{x} - 9y = 7$" também não é linear, pois $\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1}$ e vemos então que o expoente de x é -1

Vamos estudar, neste item, sistemas de equações simultâneas em que as equações são lineares, ou possam ser reduzidas a equações lineares.

De início vamos considerar casos em que as equações têm apenas duas incógnitas.

Há vários métodos para resolver tais sistemas, porém, no momento, veremos apenas o "método de substituição" e o "método de adição".

Método de Substituição

Em primeiro lugar escolhemos uma equação e na equação escolhida "isolamos" uma das incógnitas para em seguida substituir na outra equação.

Exemplo

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

Na primeira equação isolemos a incógnita x:

$$2x - 3y = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 + 3y \Leftrightarrow x = \frac{4 + 3y}{2}$$

Em seguida, na segunda equação, substituimos x por $\frac{4 + 3y}{2}$:

$$3\left(\frac{4 + 3y}{2}\right) - 2y = 11$$

Resolvendo esta equação encontramos y = 2

Portanto: $x = \frac{4 + 3y}{2} = \frac{4 + 3(2)}{2} = 5$

$$V = \{(5; 2)\}$$

Método da Adição

O método da adição é mais fácil de explicar através dos exemplos.

Exemplo

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Somando "membro a membro" obtemos:

$$(x + y) + (x - y) = 14$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Agora, em qualquer das equações originais, substituímos x por 7. Por exemplo, vamos substituir na primeira:

$$x + y = 10$$
$$7 + y = 10$$
$$y = 3$$

Assim: $V = \{(7, 3)\}$

Exemplo

Consideremos agora o sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

Vamos multiplicar todos os termos da 1ª equação por 3 e todos os termos da 2ª equação por −2:

$$\begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ -6x + 4y = -22 \end{cases}$$

Com isso conseguimos deixar os coeficientes de x nas duas equações iguais **em módulo**, porém de sinais opostos. Agora podemos somar "membro a membro".

$$6x - 9y - 6x + 4y = 12 - 22$$
$$-5y = -10$$
$$y = 2$$

Em seguida vamos a uma das equações originais e substituímos y por 2. Por exemplo, tomemos a 1ª equação:

$$2x - 3y = 4$$
$$2x - 3(2) = 4$$
$$2x - 6 = 4$$
$$x = 5$$
$$V = \{(5; 2)\}$$

Consideremos agora um sistema de três equações lineares com três incógnitas. Para resolvê-lo, em primeiro lugar escolhemos uma equação e, na equação escolhida, isolamos uma incógnita. Em seguida tomamos o valor dessa incógnita isolada e substituímos nas *outras duas* equações. Com isso obtemos um novo sistema de duas equações e **duas** incógnitas, que pode ser resolvido por um processo qualquer.

Exemplo

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x + y - z = -4 & \text{(I)} \\ 2x + y + 2z = 6 & \text{(II)} \\ 3x - y + z = 8 & \text{(III)} \end{cases}$

Isolemos x na equação (I):

$$x + y - z = -4 \Leftrightarrow x = -y + z - 4$$

Vamos agora substituir x por $-y + z - 4$ nas duas outras equações:

$$(II)\ 2(-y + z - 4) + y + 2z = 6$$

$$(III)\ 3(-y + z - 4) - y + z = 8$$

Simplificando estas duas últimas equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -y + 4z = 14 \\ -4y + 4z = 20 \end{cases}$$

Resolvendo este último sistema obtemos $y = -2$ e $z = 3$. Assim:

$$x = -y + z - 4 = -(-2) + 3 - 4 = 1$$

Um estudo mais detalhado (inclusive com outros métodos de resolução) dos sistemas lineares é feito no volume 4 desta coleção.

Exercícios Resolvidos

3.30) Resolva o sistema: $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ por substituição.

Solução:

Isolemos y na segunda equação:

$$2x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - 2x$$

Substituindo na primeira equação:

$$4x - 3(9 - 2x) = 10$$
$$4x - 27 + 6x = 10$$
$$10x = 37$$
$$x = \frac{37}{10}$$

$$y = 9 - 2x = 9 - 2\left(\frac{37}{10}\right) = 9 - \frac{37}{5} = \frac{8}{5}$$

Assim: $V = \left\{\left(\frac{37}{5}; \frac{8}{5}\right)\right\}$

3.31) Resolva o sistema: $\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ por adição.

Solução:

Vamos multiplicar a 1ª equação por 5 e a 2ª por 2:

$$\begin{cases} 20x + 10y = 35 \\ 6x - 10y = 2 \end{cases}$$

Somando membro a membro:

$$20x + 10y + 6x - 10y = 35 + 2$$
$$26x = 37$$
$$x = \frac{37}{26}$$

Substituindo esse valor de x na 1ª equação:

$$4\left(\frac{37}{26}\right)+2y=7$$

$$\frac{74}{13}+2y=7$$

$$y=\frac{17}{26}$$

Assim: $\left\{\left(\frac{37}{26};\frac{17}{26}\right)\right\}$

3.32) Resolva o sistema: $\begin{cases}\frac{4}{x}-\frac{5}{y}=12\\ \frac{8}{x}+\frac{2}{y}=9\end{cases}$

Solução:

Neste caso as equações não são lineares, pois, por exemplo, o termo $\frac{4}{x}$ pode ser escrito $4x^{-1}$ e portanto o expoente de x não é 1.
No entanto podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis:

$$\frac{1}{x}=u \quad \frac{1}{y}=v$$

Assim: $\frac{4}{x}=4u \quad \frac{5}{y}=5v$

$\frac{8}{x}=8u \quad \frac{2}{y}=2v$

e o sistema pode ser escrito:

$$\begin{cases}4u-5v=12\\ 8u+2v=9\end{cases}$$

Resolvendo este último obtemos: $u=\frac{23}{16}$ e $v=\frac{-5}{4}$

Assim: $x=\frac{1}{u}=\frac{16}{23}$

$y=\frac{1}{v}=-\frac{4}{5}$

$$V=\left\{\left(\frac{16}{23};\frac{-4}{5}\right)\right\}$$

3.33) Resolva o sistema: $\begin{cases}2x+6y=7\\ x+3y=5\end{cases}$

Solução:

Multipliquemos a segunda equação por −2:

$$x + 3y = 5 \Leftrightarrow -2x - 6y = -10$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 7 \\ -2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$2x + 6y - 2x - 6y = 7 - 10$$
$$0 = -3 \text{ (absurdo!)}$$

Neste caso então o sistema não tem solução; é um sistema *impossível*:

$$V = \varnothing$$

3.34) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$

Solução:

Somando membro a membro, obtemos:

$$2x - y - 2x + y = 4 - 4$$
$$0 = 0$$

A sentença "0 = 0" é sempre verdadeira. Isto significa que o sistema admite infinitas soluções, isto é, o sistema é *indeterminado*. Se repararmos melhor no sistema fornecido, vemos que, multiplicando todos os termos da primeira equação por −1, obtemos a segunda equação.

Exercícios Propostos

3.35) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 11y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

3.36) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2x - y + z = -11 \\ x + 5y - z = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 4y + z = -24 \\ x + z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 2y + 5z = 9 \\ 7z = 28 \end{cases}$

3.37) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{2} = \dfrac{3x + 2y}{6} + \dfrac{5x - y + 1}{4} \\ \dfrac{x}{2} - y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x + 1}{y - 2} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 8 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = 12 \end{cases}$

3.10 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU A UMA INCÓGNITA

Definição e Fórmula

Equação do 2º grau a uma incógnita é uma equação que pode ser reduzida à forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

onde: $\begin{cases} x \text{ é a incógnita} \\ a, b \text{ e } c \text{ são os coeficientes} \\ c \text{ é o termo independente} \end{cases}$

Lembrando que $a \neq 0$, vamos multiplicar ambos os membros da igualdade por $4a$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somemos b^2 aos dois membros:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Supondo $b^2 - 4ac \geq 0$, temos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em resumo, temos que, para $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É costume chamar a expressão $b^2 - 4ac$ de *discriminante da equação* e representá-lo pela letra grega Δ (lê-se "delta").

Assim, a fórmula para resolver uma equação do 2º grau é:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{onde} \quad \boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Exemplos

a) Consideremos a equação: $6x^2 + x - 1 = 0$
Aqui temos:

$$x + 3y = 5 \Leftrightarrow -2x - 6y = -10$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 7 \\ -2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$2x + 6y - 2x - 6y = 7 - 10$$
$$0 = -3 \text{ (absurdo!)}$$

Neste caso então o sistema não tem solução; é um sistema *impossível*:

$$V = \varnothing$$

3.34) Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$

Solução:

Somando membro a membro, obtemos:

$$2x - y - 2x + y = 4 - 4$$
$$0 = 0$$

A sentença "0 = 0" é sempre verdadeira. Isto significa que o sistema admite infinitas soluções, isto é, o sistema é *indeterminado*. Se repararmos melhor no sistema fornecido, vemos que, multiplicando todos os termos da primeira equação por **−1**, obtemos a segunda equação.

Exercícios Propostos

3.35) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 11y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

3.36) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2x - y + z = -11 \\ x + 5y - z = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 4y + z = -24 \\ x + z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 2y + 5z = 9 \\ 7z = 28 \end{cases}$

3.37) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{2} = \dfrac{3x + 2y}{6} + \dfrac{5x - y + 1}{4} \\ \dfrac{x}{2} - y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x + 1}{y - 2} = \dfrac{2}{3} \\ x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 8 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = 12 \end{cases}$

3.10 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU A UMA INCÓGNITA

Definição e Fórmula

Equação do 2º grau a uma incógnita é uma equação que pode ser reduzida à forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

onde: $\begin{cases} x \text{ é a incógnita} \\ a, b \text{ e } c \text{ são os coeficientes} \\ c \text{ é o termo independente} \end{cases}$

Lembrando que $a \neq 0$, vamos multiplicar ambos os membros da igualdade por 4a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somemos b^2 aos dois membros:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Supondo $b^2 - 4ac \geq 0$, temos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em resumo, temos que, para $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É costume chamar a expressão $b^2 - 4ac$ de *discriminante da equação* e representá-lo pela letra grega Δ (lê-se "delta").

Assim, a fórmula para resolver uma equação do 2º grau é:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{onde} \quad \boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Exemplos

a) Consideremos a equação: $6x^2 + x - 1 = 0$

Aqui temos:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(6)(-1) = 1 + 24 = 25 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2(6)} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

Temos aqui duas raizes que indicaremos por x' e x":

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\ x'' = \dfrac{-1-5}{12} = \dfrac{-6}{12} = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \qquad V = \left\{\frac{1}{3}; \frac{-1}{2}\right\}$$

b) Tomemos agora a equação $25x^2 - 20x + 4 = 0$

$$\begin{cases} a = 25 \\ b = -20 \\ c = 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 \pm 0}{2(25)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

O conjunto-verdade é: $V = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

Neste caso ($\Delta = 0$) obtivemos um conjunto-verdade com apenas um elemento. No entanto, costuma-se dizer que a equação tem duas raizes iguais ou ainda, que a equação tem uma **raiz dupla**. Podemos então escrever, para este exercício:

$$x' = x'' = \frac{2}{5}$$

c) Seja a equação $4x^2 - 3x + 5 = 0$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(4)(5) = 9 - 80 = -71$$

Repare que $\Delta < 0$ e sabemos que, no conjunto dos números reais, não existe raiz quadrada de número negativo. Portanto, neste caso, temos $V = \varnothing$

Número de Raizes

Conforme pudemos observar, dependendo de Δ temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$ A equação possui duas raizes reais e distintas, representadas por x' e x":

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º) $\Delta = 0$ A equação possui duas raízes reais e iguais (uma raiz dupla):

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

3º) $\Delta < 0$ A equação não possui raízes **reais**, no entanto tem raízes imaginária (que não é nosso assunto neste livro).

Equações incompletas

Uma equação do 2º grau em que b = 0 ou c = 0 é chamada incompleta. Assim, por exemplo, são incompletas as equações:

$4x^2 - 3x = 0$; $3x^2 - 9 = 0$; $5x^2 = 0$

Para resolver uma equação incompleta podemos obviamente usar a fórmula vista anteriormente, mas há modos mais rápidos, como veremos nos exemplos a seguir

Exemplos

a) Consideremos a equação $4x^2 - 3x = 0$. Colocando **x** em evidência, temos:

$$4x^2 - 3x = x(4x - 3).$$

Assim:

$$4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

Portanto: $V = \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$

b) Seja agora a equação $3x^2 - 12 = 0$. Temos:

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Logo: $V = \{2; -2\}$

Mudança de Variável

Há algumas equações que podem ser resolvidas com uma mud[illegible] variável.

Exemplo

Consideremos a equação $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Fazendo $x^2 = t$ teremos $x^4 = t^2$ e portanto a equação fornecida transforma-se em $t^2 - 5t - 36 = 0$. Resolvendo esta última, obtemos: $t' = -4$ e $t'' = 9$.

Como $x^2 = t$, concluímos que $x = \pm\sqrt{t}$ e assim:

$$\begin{cases} \text{para } t = -4 \text{ vem } x^2 = -4 \text{ (aqui não temos raízes reais)} \\ \text{para } t = 9 \text{ vem } x^2 = 9 \text{ e portanto: } x = \pm 3 \end{cases}$$

O conjunto-verdade é: $V = \{3; -3\}$

A equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ é conhecida pelo nome de **equação biquadrada**.

Exercicios Resolvidos

3.38) Resolva as equações:
a) $8x^2 = 21 - 2x$
b) $(x - 3)^2 = (x + 4)^2 - (20x - 23)$
c) $(x^2 - 8x + 21)^2 = 81$

Solução:

a) $8x^2 = 21 - 2x \Leftrightarrow 8x^2 + 2x - 21 = 0$

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \\ c = -21 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(8)(-21) = 4 + 672 = 676$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{676} = 26$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 26}{16} = \frac{-1 \pm 13}{8}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1 + 13}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \\ x'' = \dfrac{-1 - 13}{8} = \dfrac{-14}{8} = \dfrac{-7}{4} \end{cases} \qquad V = \left\{\frac{3}{2}; \frac{-7}{4}\right\}$$

b) Lembrando que: $\begin{cases} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$

temos: $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ e $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

Assim:

$(x - 3)^2 = (x + 4)^2 - (20x - 23) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 - 20x + 23 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6x - 8x + 20x = 16 + 23 - 9 \Leftrightarrow 6x = 30 \Leftrightarrow x = 5$

$$V = \{5\}$$

c) $(x^2 - 8x + 21)^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 21 = 9 \vee x^2 - 8x + 21 = -9$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 21 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 & V_1 = \{2; 6\} \\ x^2 - 8x + 21 = -9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 30 = 0 & V_2 = \varnothing \end{cases}$$

$$V = V_1 \cup V_2 = \{2; 6\}$$

3.39) Resolva as equações

a) $3x^2 + x = 0$
b) $2x^2 - 32 = 0$
c) $x^2 = x$
d) $5x^2 + 2 = 0$

Solução:

a) Neste caso, a equação é incompleta e portanto não é necessário usar a fórmula.

$3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{-1}{3}$

$$V = \left\{0; \frac{-1}{3}\right\}$$

b) $2x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

$$V = \{4; -4\}$$

c) $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$

$$V = \{0; 1\}$$

d) $5x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{2}{5}$

Não existe número real que elevado ao quadrado resulte negativo. Portanto, a equação proposta não tem raizes reais.

3.40) Resolva as equações:

a) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

Solução:

a) Façamos $x^3 = y$; assim $x^6 = y^2$ e a equação proposta transforma-se em $y^2 + 7y - 8 = 0$. Resolvendo esta última equação:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \\ c = -8 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(1)(-8) = 49 + 32 = 81 \\ &\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-7 + 9}{8} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y'' = \dfrac{-7 \quad 9}{2} = \dfrac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

Lembrando que $x^3 = y$ temos $x = \sqrt[3]{y}$ e portanto:

$$\begin{cases} \text{para } y = 1 \text{ vem } x = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \text{para } y = -8 \text{ vem } x = \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

$$V = \{1; -2\}$$

b) Façamos $(x + \frac{1}{x}) = y$ e vamos impor $x \neq 0$.

Com essa mudança de variável, a equação proposta transforma-se em $y^2 - 5y + 6 = 0$, equação esta que tem as raizes $y' = 2$ e $y'' = 3$.
Assim:

1º) para $y = 2$ temos $x + \frac{1}{x} = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

A equação $x^2 - 2x + 1 = 0$ apresenta duas raizes iguais:

$$x' = x'' = 1$$

2º) para y = 3 temos $x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$

As raízes de $x^2-3x+1=0$ são $x'=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x''=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Portanto: $V=\left\{1;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

3.41) Resolva a equação: $8x^4+7x^2+5=0$.

Solução:

Neste caso, temos $x^4 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$. Portanto, para qualquer valor de x teremos $8x^4+7x^2 \geq 0$.
No entanto, $8x^4+7x^2+5=0 \Leftrightarrow 8x^4+7x^2=-5$.
Assim vemos que a equação proposta não tem solução real, pois para nenhum valor real de x, a expressão $8x^4+7x^2$ poderá resultar negativa:

$$V=\varnothing$$

3.42) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y=9 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 5x+4y=20 \end{cases}$

Solução:

a) Isolemos x na segunda equação:

$$2x-3y=-4 \Leftrightarrow 2x=3y-4 \Leftrightarrow x=\frac{3y-4}{2}$$

e façamos a substituição na primeira:

$$\left(\frac{3y-4}{2}\right)^2+y^2-2\left(\frac{3y-4}{2}\right)+3y=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9y^2-24y+16}{4}+y^2-(3y-4)+3y=9 \Leftrightarrow 13y^2-24y-4=0$$

Resolvendo esta última equação obtemos: $y'=2$ e $y''=\dfrac{-2}{13}$.

Lembrando que $x=\dfrac{3y-4}{2}$, temos:

para $y=2$, $x=\dfrac{3(2)-4}{2}=1$

para $y=\dfrac{-2}{13}$, $x=\dfrac{3\left(\frac{-2}{13}\right)-4}{2}=\dfrac{-29}{13}$

Assim, $V=\left\{(1;\ 2);\ \left(\dfrac{-29}{13};\ \dfrac{-2}{13}\right)\right\}$

b) Isolando x na segunda equação:

$5x + 4y = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{20-4y}{5}$

Substituindo na primeira equação:

$$\left(\frac{20-4y}{5}\right)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{400-160y+16y^2}{25} + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 400-160y+16y^2+25y^2 = 100 \Leftrightarrow 41y^2-160y+300=0$$

Porém, ao calcularmos o discriminante desta última equação, temos:

$$\Delta = (-160)^2 - 4(41)(300) = 25600 - 49200 = -23600 < 0$$

portanto esta última equação não tem solução (no campo dos reais) e o sistema também não tem solução:

$$V = \varnothing$$

3.43) Resolva o sistema: $\begin{cases} x^2+y^2+6x-12y+20=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-20=0 \end{cases}$

Solução:

Vamos multiplicar a segunda equação por -1 e somar membro a men.

$$\oplus\begin{cases} x^2+y^2+6x-12y+20=0 \\ -x^2-y^2+2x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 8x-16y+40=0}$$

A vantagem do que fizemos é que conseguimos obter uma equação do 1º grau, o que facilita no momento de isolar uma incógnita. Vamos isolar a incógnita x:

$$8x - 16y + 40 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 5$$

Substituindo na 1ª equação, obtemos:

$$(2y-5)^2 + y^2 + 6(2y-5) - 12y + 20 = 0$$

Resolvendo esta última equação, teremos: $y' = 1$, $y'' = 3$.

Como $x = 2y - 5$, vem:

$$\begin{cases} \text{para } y = 1,\ x = 2(1) - 5 = -3 \\ \text{para } y = 3,\ x = 2(3) - 5 = 1 \end{cases} \qquad V = \{(-3;\ 1);\ (1;\ 3)\}$$

3.44) Resolva a equação: $(x^2 - 2x + 1)^2 - 5(x^2 - 2x) - 41 = 0$

Solução:

Fazendo $x^2 - 2x = y$, temos: $\begin{cases} x^2-2x+1 = y+1 \\ (x^2-2x+1)^2 = (y+1)^2 \end{cases}$

Com estas substituições, a equação proposta transforma-se em:

$$(y+1)^2 - 5y - 41 = 0$$

cujas raizes são: $y' = 8$ e $y'' = -5$

Lembrando que $x^2 - 2x = y$, temos:

1º) para $y = 8$, $x^2 - 2x = 8$. Resolvendo esta equação, obtemos:

$$x' = 4 \text{ e } x'' = -2$$

2º) para $y = -5$, $x^2 - 2x = -5$. Porém esta equação não admite raizes reais.
Assim, o conjunto-verdade da equação proposta é:

$$V = \{4; -2\}$$

Exercicios Propostos

3.45) Resolva as equações:

a) $4x^2 + 17x - 21 = 0$
b) $6x - 1 = 9x^2$
c) $-3x^2 = x - 1$
d) $6x^2 = 6(2x - 1) + x$
e) $(x+1)^2 = 4$
f) $-x^2 - x - 1 = 0$

3.46) Resolva as equações:

a) $-x^2 + x = 0$
b) $2x^2 = 50$
c) $4x^2 - 1 = 0$
d) $3x^2 + 2 = 0$
e) $4x^2 = 6x$

3.47) Resolva as equações:

a) $\dfrac{x^2}{2} = 4x + \dfrac{9}{2}$

b) $x + \dfrac{1}{x} = 2$

c) $(x+1)(2x-3) = x^2 + x + 7$

d) $\dfrac{5x+1}{x} + \dfrac{15x+2}{x-1} = 20$

e) $\dfrac{x-2}{3x-8} = \dfrac{x+5}{5x-2}$

f) $(3x+2)^2 - 4x = -x + 4$

g) $(2x-5)^2 - x = 3x - 7$

h) $\dfrac{x^2+2}{x^2+5} = \dfrac{1}{x^2-2} + \dfrac{11}{14}$

3.48) Resolva as equações:

a) $4x^4 - 5x^2 = -1$

b) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

d) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

e) $x^6 = x^3$

f) $\dfrac{1}{x^4} = \dfrac{6}{x^2} - 8$

g) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

h) $\left(\dfrac{x}{4x+1}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{4x+1}\right) + 2$

i) $(x^2 - x + 3)^2 - 10(x^2 - x) = 105$

j) $5x^8 + 7x^6 + x^2 + 1 = 0$

3.49) Resolva as equações:

a) $(2x-5)(x^6 + x^4 - 20x^2) = 0$
b) $4x^3 + 5x^2 + 16x + 20 = 0$
c) $2x^5 - x^4 + 10x^3 - 5x^2 = 0$
d) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = 0$

3.50) Resolva as equações:

a) $(x^2 - 3x)^2 = 16$

b) $(3x^2 + 2x)^3 = 125$

(Sugestões: $16 = 4^2$; $125 = 5^3$)

3.51) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -16 \\ xy = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 24y + 60 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 6y - 40 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \\ 4x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$

3.11 – EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: RELAÇÕES DE GIRARD

Dada a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, sabemos que suas raizes são (supondo $\Delta \geq 0$):

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Calculemos a soma das raizes:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Calculemos também o **produto** das raizes:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' + x'' &= -\frac{b}{a} \\ x' \cdot x'' &= \frac{c}{a} \end{aligned}} \text{ (Relações de Girard)}$$

Estas "relações entre os coeficientes e as raizes" foram estabelecidas por Girard (Albert Girard, flamengo, 1590-1633) em 1629. Ele mostrou que essas relações valem também para raízes imaginárias e estabeleceu relações entre os coeficientes e as raizes para equações de grau superior a 2. (Este assunto é analisado mais detalhadamente no volume 7 de nossa coleção.)

Exemplo

Consideremos a equação $6x^2 - 7x + 2 = 0$ onde: $a = 6$, $b = -7$ e $c = 2$.

Resolvendo-a, obtemos $x' = \frac{2}{3}$ e $x'' = \frac{1}{2}$.

$$\left|\begin{matrix} x' + x'' = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \\ -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{6} = \frac{7}{6} \end{matrix}\right| x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$\left|\begin{matrix} x' \cdot x'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{matrix}\right| x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Caso em que a = 1

Consideremos a equação do segundo grau em que a = 1: $x^2 + bx + x = 0$. Para este caso, temos:

$$\begin{cases} x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{1} = -b \\ x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c \end{cases}$$

Chamemos de S a soma das raízes e P o seu produto:

$$S = -b \text{ e } P = c$$

isto é: $b = -S$ e $c = P$.

Assim a equação pode ser escrita:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplo

Consideremos o seguinte problema:
"qual é a equação do segundo grau cujas raízes são 7 e 8?".
Suponhamos inicialmente que na equação procurada tenhamos a = 1.
Assim a equação pode ser escrita: $x^2 - Sx + P = 0$.

Mas: $\begin{cases} S = 7 + 8 = 15 \\ P = 7(8) = 56 \end{cases}$

Portanto, a equação é: $x^2 - 15x + 56 = 0$.

Obviamente esta não é a única equação do segundo grau cujas raízes são 7 e 8. Se multiplicarmos todos os coeficientes da equação acima por um número real diferente de zero, obteremos outra equação do segundo grau cujas raízes são 7 e 8. Por exemplo, se multiplicarmos os coeficientes da equação por 2, obteremos a equação $2x^2 - 30x + 112 = 0$, cujas raízes são 7 e 8.

Exemplo

Certas equações do 2º grau em que a = 1 podem ser resolvidas "por tentativa" usando a forma $x^2 - Sx + P = 0$.

Seja por exemplo a equação $x^2 - 4x - 12 = 0$.

Temos:

$$S = 4 \text{ e } P = -12$$

"Mentalmente", tentamos encontrar dois números cuja soma seja 4 e cujo produto seja −12.

Encontramos −2 e 6. Sendo assim, o conjunto-verdade é:

$$V = \{-2; 6\}$$

3.12 – TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU: FATORAÇÃO

Trinômio do segundo grau é uma expressão do tipo:

$$ax^2 + bx + c$$

onde
- x é a variável
- a, b e c são coeficientes (reais)
- $a \neq 0$

É importante não confundir "trinômio do segundo grau" com "equação do segundo grau", pois esta é obtida igualando a zero um trinômio do segundo grau ($ax^2 + bx + c = 0$).

Vamos demonstrar que o trinômio do segundo grau pode ser fatorado do seguinte modo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')}$$

onde **x'** e **x"** são as raizes da *equação* $ax^2 + bx + c = 0$.

Demonstração:

Consideremos o trinômio: $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$. Suponhamos que a equação: $ax^2 + bx + c = 0$ tenha as raizes x' e x".

Temos então:
$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x''] = a[x^2 - x'x - x''x + x'x''] =$$

$$= a[x(x - x') - x''(x - x')] = a[(x - x')(x - x'')]$$

c.q.d

Observação:

Pode-se demonstrar que esta decomposição vale mesmo que as raizes sejam imaginárias.

Exemplo

Consideremos o trinômio $6x^2 - 7x + 2$. Igualando-o a zero obtemos a equação $6x^2 - 7x + 2 = 0$, cujas raizes são: $x' = \dfrac{2}{3}$ e $x'' = \dfrac{1}{2}$.

Portanto: $\begin{cases} a = 6 \\ b = -7 \\ c = 2 \end{cases}$ $\quad x' = \dfrac{2}{3} \quad x'' = \dfrac{1}{2}$

Assim:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$6x^2 - 7x + 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Exercícios Resolvidos

3.52) Determine o valor de **k** na equação $3x^2 - 7x + (k + 2) = 0$ de modo que uma de suas raízes seja o sextuplo da outra.

Solução:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \\ c = k + 2 \end{cases} \qquad x' = 6x''$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow 6x'' + x'' = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{3} \\ x' = 6x'' = 6(\dfrac{1}{3}) = 2 \end{cases}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 2(\frac{1}{3}) = \frac{k+2}{3} \Leftrightarrow k = 0$$

3.53) Determine o valor de p na equação $5x^2 + (3p + 2)x - 9 = 0$ de modo que suas raízes sejam simétricas.

Solução:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 3p + 2 \\ c = -9 \end{cases} \qquad x' = -x''$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -x'' + x'' = -\frac{3p+2}{5} \Leftrightarrow 0 = -\frac{3p+2}{5} \Rightarrow p = \frac{-2}{3}$$

Neste caso não foi necessário usar a relação $x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a}$.

3.54) Fatore o trinômio $2x^2 - 11x + 5$

Solução:

Em primeiro lugar determinamos as raízes da equação: $2x^2 - 11x + 5 = 0$, que são $\dfrac{1}{2}$ e 5.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -11 \\ c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} \\ x'' = 5 \end{cases}$$

Logo: $2x^2 - 11x + 5 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 5)$

ou ainda: $2x^2 - 11x + 5 = (2x - 1)(x - 5)$

3.55) Dê uma equação do segundo grau cujas raízes sejam –3 e 7.

Solução:

1º modo - Suponhamos que a equação procurada tenha **a** = 1

$$(x^2 + bx + c = 0)$$

$$\begin{cases} x' = -3 \qquad x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow -3 + 7 = -\dfrac{b}{1} \Leftrightarrow b = -4 \\ x'' = 7 \qquad x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow (-3)(7) = \dfrac{c}{1} \Leftrightarrow c = -21 \end{cases}$$

Portanto uma das equações do segundo grau cujas raízes são – 3 e 7 é:

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

2º modo - Sabemos que x' = –3 e x" = 7.

Sendo $ax^2 + bx + c = 0$ a equação procurada, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'') = a(x + 3)(x - 7)$$

Fazendo a = 1, a equação é:

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

Efetuando a multiplicação, obtemos: $x^2 - 4x - 21 = 0$

3.56) Fatore a expressão $4x^4 - 5x^2 + 1$

Solução:

Em primeiro lugar façamos a mudança de variável: $x^2 = y$ e $x^4 = y^2$.

Assim: $4x^2 - 5x^2 + 1 = 4y^2 - 5y + 1$

As raízes da equação $4y^2 - 5y + 1 = 0$ são $y' = \dfrac{1}{4}$ e $y'' = 1$

Assim: $4y^2 - 5y + 1 = 4\left(y - \dfrac{1}{4}\right)(y - 1)$

Mas como $y = x^2$ temos:

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 4y^2 - 5y + 1 = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)(x^2 - 1) =$

$$= 4\left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right][x^2 - 1^2] = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x-1)$$

3.57) Determine o valor de k de modo que a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^2 - 5x + k = 0$ seja igual a $\frac{7}{4}$.

Solução:

$$\begin{cases} x' + x'' = \frac{5}{2} \\ x' \cdot x'' = \frac{k}{2} \end{cases} \qquad (x')^2 + (x'')^2 = \frac{7}{4}$$

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + (x'')^2 + 2x'x''$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} + 2\left(\frac{k}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{25}{4} = \frac{7}{4} + k \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$$

Exercícios Propostos

3.58) Determine o valor de m na equação $5x^2 - 8x + (3m - 8) = 0$, de modo que uma de suas raízes seja o triplo da outra.

3.59) Determine o valor de k na equação $2x^2 - 30x + (2k - 1) = 0$, de modo que a diferença de suas raízes seja igual a 3.

3.60) Determine o valor de k na equação $5x^2 - 12x + 6k + 2 = 0$, de modo que:
a) uma de suas raízes seja o dobro da outra
b) suas raízes sejam simétricas
c) uma das raízes seja o inverso da outra

3.61) Considere a equação $3x^2 - 7x + 1 = 0$. Calcule a soma dos quadrados de suas raízes.

3.62) Dê uma equação do segundo grau que tenha como raízes:
a) 3 e 2
b) -6 e 4
c) $-\frac{1}{3}$ e 2
d) $\sqrt{2}$ e 3

3.63) Dê uma equação do segundo grau que tenha duas raízes iguais a -5.

3.64) Fatore as expressões.
a) $x^2 + 3x - 18$
b) $2x^2 + 7x - 15$
c) $4x^2 + 12x + 9$
d) $x^4 - 5x^2 + 4$

e) $9x^4 - 10x^2 + 1$
f) $x^4 + x^2 - 12$

Inequações

4.1 – PROPRIEDADES

P_1 Quaisquer que sejam os reais a, b e x, temos:
$a > b \Leftrightarrow a + x > b + x$

Isto significa que podemos somar (ou subtrair) um mesmo número aos dois membros da desigualdade a > b sem alterar seu "valor de verdade".

Assim, por exemplo, a sentença verdadeira 7 > 2 continua verdadeira se somarmos o número 5 aos dois membros: 7 + 5 > 2 + 5.

Esta propriedade permite "passar" um número de um lado para outro da desigualdade desde que troquemos o sinal do número.

Exemplos

a) Consideremos a desigualdade **x – 4 > 5**. Somemos o número **4** aos dois membros.

$$x - 4 + 4 > 5 + 4$$
$$x > 5 + 4$$

Em resumo: $x - 4 > 5 \Leftrightarrow x > 5 + 4$

b) Seja a desigualdade x + 2 < 7. Vamos subtrair dos dois membros o número 2:

$$x + 2 - 2 < 7 - 2$$
$$x < 7 - 2$$

isto é: $x + 2 < 7 \Leftrightarrow x < 7 - 2 \Leftrightarrow x < 5$

P_2 $a > b \Rightarrow ax > bx$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
$a > b \Leftrightarrow \frac{a}{x} > \frac{b}{x}$ $\quad \forall b \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Esta propriedade nos diz que podemos multiplicar (ou dividir) os dois membros de uma desigualdade por um número **positivo**, sem alterar seu valor de verdade.

Exemplos

a) A desigualdade 5 > 2 é verdadeira. Se multiplicarmos os dois membros por 7 (por exemplo) obteremos a sentença 35 > 14, que ainda é verdadeira.

b) A desigualdade $7 > 12$ é falsa. Se multiplicarmos os dois membros pelo número 2 obteremos a sentença $14 > 24$, que ainda é falsa.

c) $3x < 12 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} < \frac{12}{3} \Leftrightarrow x < 4$

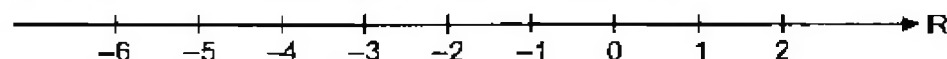
d) $-4x < 20 \Leftrightarrow 5(-4x) < 5(20) -20x < 100$

e) $4x \geq 20 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} \geq \frac{20}{4} \Leftrightarrow x \geq 5$

P_3 $\boxed{\begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow ax < bx \\ a > b \Leftrightarrow \frac{a}{x} < \frac{b}{x} \end{array}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$

Esta propriedade nos diz que, se multiplicarmos ou dividirmos os dois membros da desigualdade $a > b$ por um número negativo, devemos inverter seu sentido para manter seu "valor de verdade".

Exemplos

a) Consideremos a sentença $2 > 1$, que é verdadeira.

Se multiplicarmos os dois membros pelo número negativo −3, devemos inverter o sentido da desigualdade:

$$(-3)(2) < (-3)(1)$$
$$-6 < -3$$

b) $3 > -1 \Leftrightarrow (-2)(3) < (-2)(-1) \Leftrightarrow -6 < 2$

c) $2 < 5 \Leftrightarrow (-1)(2) > (-1)(5) \Leftrightarrow -2 > -5$

d) $20 \geq -4 \Leftrightarrow \frac{20}{-2} \leq \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow -10 \leq 2$

e) $-4x \geq 20 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-2} \leq \frac{20}{-4} \Leftrightarrow x \leq -5$

f) $-x < 20 \Leftrightarrow (-1)(-x) > (-1)(20) \Leftrightarrow x > -20$

4.2 – INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Uma inequação do primeiro grau é aquela que pode ser reduzida à forma:

$$ax + b > 0 \text{ (onde } a \neq 0)$$

Uma das maneiras de resolver uma inequação desse tipo é fazer uso das propriedades da desigualdade e proceder de modo semelhante ao desenvolvido na resolução de uma equação do primeiro grau.

Exemplo

Vamos resolver a inequação $4x - 3 > 0$.

Em primeiro lugar, passamos −3 para o lado direito, baseados na propriedade P_1:

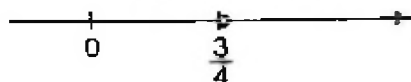
$$4x - 3 > 0 \Leftrightarrow 4x > 3$$

Em seguida dividimos os dois membros por 4:

$$4x > 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

Portanto, o conjunto-verdade é:

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4} \right\}$$

0 $\quad \frac{3}{4}$

ou, usando a notação de intervalo,

$$V = \left] \frac{3}{4}; \infty \right[$$

Exercícios Resolvidos

4.1) Resolver as inequações:

a) $3x - 12 > 0$

b) $-2x + 14 < 0$

Solução:

a) $3x - 12 > 0 \xleftrightarrow{P_1} 3x > 12 \xleftrightarrow{P_2} x > \frac{12}{3} \Leftrightarrow x > 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} =]4; +\infty[$

b) $-2x + 14 < 0 \Leftrightarrow -2x < -14 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{-14}{-2} \Leftrightarrow x > 7$

$V =]7; +\infty[$

4.2) Resolva as inequações:

a) $-5x + 1 \le 3x + 2$

b) $3x - \frac{x-2}{4} < \frac{1-2x}{6}$

Solução:

a) $-5x + 1 \le 3x + 2 \Leftrightarrow -5x - 3x \le 2 - 1 \Leftrightarrow -8x \le 1 \Leftrightarrow \frac{-8x}{-8} \ge \frac{1}{-8} \Leftrightarrow x \ge \frac{-1}{8}$

$$V = \left[-\frac{1}{8}; +\infty \right[$$

b) Neste caso o mmc dos denominadores é 12. Multiplicando todos os termos por 12, temos:

$$12(3x) - 3(x - 2) < 2(1 - 2x)$$
$$36x - 3x + 6 < 2 - 4x$$
$$37x < -4$$
$$x < -\frac{4}{37}$$
$$V = \left] -\infty; \frac{-4}{37} \right[$$

4.3) Resolva as inequações:

a) $(x-3)^4 > 0$
b) $(x-3)^4 \geq 0$
c) $(x-3)^4 < 0$
d) $(x-3)^4 \leq 0$
e) $(x-3)^7 > 0$
f) $(x-3)^7 \geq 0$
g) $(x-3)^7 < 0$
h) $(x-3)^7 \leq 0$

Solução:

a) Neste caso temos uma potência de expoente par e portanto o resultado nunca será negativo. Portanto, para que $(x-3)^4$ seja maior que zero, basta que $x-3$ seja diferente de zero:

$$(x-3)^4 > 0 \Leftrightarrow x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

$$\therefore V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Levando em conta a discussão no item a concluímos que a sentença $(x-3)^4 \geq 0$ é verdadeira para qualquer valor real de x:

$$V = \mathbb{R}$$

c) O resultado de $(x-3)^4$ nunca poderá ser negativo e portanto, neste caso, temos:

$$V = \varnothing$$

d) Como $(x-3)^4$ não pode ser negativo, temos:

$$(x-3)^4 \leq 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$V = \{3\}$$

e) A potência $(x-3)^7$ tem expoente ímpar e portanto o sinal de $(x-3)^7$ é o mesmo sinal da base $x-3$.
Assim:

$$(x-3)^7 > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$V =]3; +\infty[$$

f) $(x-3)^7 \geq 0 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$$V = [3; +\infty[$$

g) $(x-3)^7 < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

$$V =]-\infty; 3[$$

h) $(x-3)^7 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$$V =]-\infty; 3]$$

4.4) Dê o conjunto-solução de cada sistema de inequações:

a) $2x-6 > 0 \wedge 3x-27 < 0$
b) $2x-6 > 0 \vee 3x-27 < 0$

Solução:

a) Seja S_1 o conjunto-solução de $2x-6 > 0$

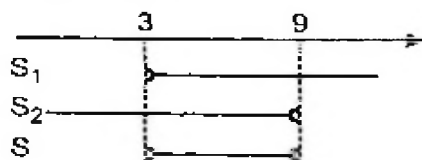
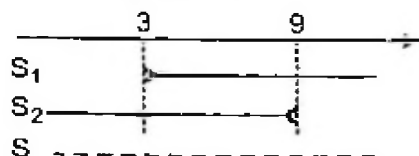
$2x-6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$ $\quad S_1 =]3; +\infty[$

Seja S_2 o conjunto-solução de $3x-27 < 0$

$3x-27 < 0 \Leftrightarrow 3x < 27 \Leftrightarrow x < 9$ $\quad S_2 =]-\infty; 9[$

Sendo S o conjunto-solução do sistema, temos:

$S = S_1 \cap S_2$

$S =]3; 9[$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

b) Neste caso o conjunto-solução S é dado por $S = S_1 \cup S_2$. Pelo diagrama, percebemos facilmente que $S = \mathbb{R}$.

4.5) Resolva o sistema de inequações:

$$\begin{cases} -4x + 12 > 0 \\ 2x + 8 > 0 \end{cases}$$

Solução:

Quando não é mencionado o conectivo, vale a mesma convenção que fizemos no caso de sistemas de equações: admitimos que se trata do conectivo $\wedge$. Quando o conectivo é $\wedge$ dizemos também que se trata de um sistema de inequações simultâneas.

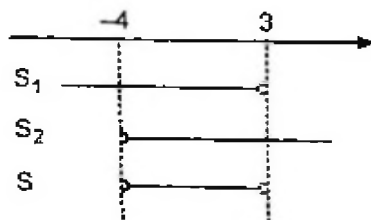
Seja S_1 o conjunto-solução de $-4x + 12 > 0$

$-4x + 12 > 0 \Leftrightarrow -4x > -12 \Leftrightarrow x < 3 \therefore S_1 =]-\infty; 3[$

Seja S_2 o conjunto-solução de $2x + 8 > 0$

$2x + 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > -8 \Leftrightarrow x > -4 \therefore S_2 =]-4; \infty[$

Sendo S o conjunto-solução do sistema, temos: $S = S_1 \cap S_2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$ ou $S =]-4; 3[$

4.6) Dê o conjunto-solução da sentença aberta $-3 < 5 - 2x < 9$.

Solução:

1° modo - Sabemos que $-3 < 5 - 2x < 9$ é equivalente a:

$$-3 < 5 - 2x \wedge 5 - 2x < 9$$

$$\begin{cases} -3 < 5 - 2x \Leftrightarrow 2x < 5 + 3 \Leftrightarrow x < 4 & S_1 =]-\infty; 4[\\ 5 - 2x < 9 \Leftrightarrow -2x < 9 - 5 \Leftrightarrow x > -2 & S_2 =]-2; \infty[\end{cases}$$

$$S = S_1 \cap S_2 =]-2; 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$$

2º modo - Podemos trabalhar diretamente com a sentença

$$-3 < 5 - 2x < 9$$

$$-3 < 5 - 2x < 9 \Leftrightarrow -3 - 5 < 5 - 5 - 2x < 9 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 < -2x < 4 \Leftrightarrow \frac{-8}{2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

$$\therefore S =]-2; 4[$$

4.7) Determine os valores de m tais que a equação:
$4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ não admita raizes reais,

Solução:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \\ c = 2m - 1 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)\ (2m - 1) = 25 - 16\ (2m - 1) = 25 - 32m + 16 = 41 - 32m$

Para que a equação não admita raízes reais devemos ter $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 41 - 32m < 0 \Leftrightarrow -32m < -41 \Leftrightarrow m > \frac{41}{32}$.

Portanto, a resposta é:

$$m > \frac{41}{32}$$

4.8) Determine os valores m tais que a equação $4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ ad. duas raizes reais e distintas.

Solução:

$\Delta = 41 - 32m$

Para satisfazer a condição do problema, impomos $\Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 41 - 32m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{41}{32}$

4.9) Determine m de modo que a equação: $4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ admita duas raizes reais e iguais.

Solução:

$\Delta = 41 - 32m$

Para satisfazer a condição pedida, devemos ter $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 41 - 32m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{41}{32}$

4.10) Determine m de modo que a equação:
$4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ admita raizes reais:

Solução:

Neste caso não foi esclarecido se as raizes são distintas ou iguais. Assim, devemos ter $\Delta \geq 0$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 41 - 32m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{41}{32}$

Exercicios Propostos

4.11) Resolva as inequações:

a) $x - 5 > 0$
b) $4x - 3 < x$
c) $x \geq 2x + 1$
d) $3x - 2 \leq x + 1$
e) $2x - 3 < 5x + 6$
f) $\frac{x-1}{5} - 2x < \frac{4x-1}{10}$

4.12) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 30 > 0 \\ \vee \\ 3x - 45 < 0 \end{cases}$

c) $-2 < 6 - 9x < 8$

d) $\begin{cases} 3x - 12 \geq 0 \\ 4x + 2 < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + 12 < 0 \\ -5x + 28 < 0 \end{cases}$

4.13) Determine os valores de k na equação:
$6x^2 - 7x - (3k - 1) = 0$, de modo que:

a) a equação admita duas raizes reais e distintas
b) a equação admita duas raizes reais e iguais
c) a equação admita raizes reais
d) a equação não admita raizes reais

4.3 – SINAIS DE ax + b

Consideremos o binômio $ax + b$, onde x é a variável, $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. O valor numérico do binômio poderá ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor atribuído a x

Exemplo

Consideremos o binômio $2x - 12$. Para $x = 7$, o binômio tem valor numérico positivo:

$$2x - 12 = 14 - 12 = 2$$

Para $x = 3$, temos $2x - 12 = 6 - 12 = -6$, isto é, para $x = 3$, o binômio tem valor numérico negativo.

Para $x = 6$, temos $2x - 12 = 0$, isto é, para: $x = 6$, o valor numérico do binômio é igual a zero. Diremos que o número 6 é a **raiz** do binômio $2x - 12$.

De modo geral, o número que, substituído no lugar de x, dá valor numérico nulo é chamado de **raiz do binômio**.

Exemplos

a) A raiz do binômio: $2x - 14$ é 7, pois para $x = 7$, temos $2x - 14 = 0$.
b) A raiz de $-3x - 12$ é -4, pois para $x = -4$, temos $-3x - 12 = 0$.

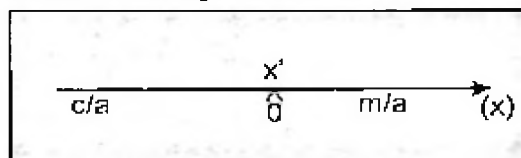
Determinemos a raiz x' do binômio $ax + b$ (onde $a \neq 0$):

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Portanto: $x' = \frac{-b}{a}$

Pode-se verificar que:

1º) Para valores de x maiores de x', o sinal de $ax + b$ é o **mesmo de a**.
2º) Para valores de x menores que x', o sinal de $ax + b$ é **contrário ao de a**.

Isto pode ser resumido na seguinte tabela:

onde: m/a significa "o mesmo sinal de a"; c/a significa "sinal contrário ao de a"

Se $a > 0$, a tabela é:
Se $a < 0$, a tabela é:

Exemplo

Façamos o estudo do binômio $2x - 10$. Para tanto, em primeiro lugar determinamos a raiz do binômio:

$$2x - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Temos:

$$\begin{cases} a = 2, \text{ isto é, } a > 0 \\ x' = 5 \end{cases}$$

Assim a tabela de sinais é:

Esta tabela nos informa que:

a) para $x = 5$, o valor numérico do binômio é igual a zero

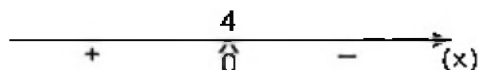
b) para $x < 5$, o valor numérico do binômio é negativo
c) para $x > 5$, o valor numérico do binômio é positivo

Exemplo

Consideremos o binômio $-3x + 12$. Determinemos sua raiz:

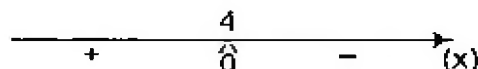
$$-3x + 12 = 0 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\begin{cases} a = -3, \text{ isto é, } a < 0 \\ x' = 4 \end{cases}$$

A tabela de sinais é:

Este quadro nos informa que:

a) para $x = 4$, temos $-3x + 12 = 0$
b) para $x > 4$, o valor numérico de $-3x + 12$ é negativo
c) para $x < 4$, o valor numérico de $-3x + 12$ é positivo

Exemplo

O estudo de sinais nos dá um outro processo para resolver inequações do primeiro grau. Assim, por exemplo, se quisermos resolver a inequação $-3x + 12 > 0$, fazemos primeiramente o estudo do binômio $-3x + 12$ (ver exemplo anterior).

Da tabela percebemos que $-3x + 12 > 0$ para $x < 4$ e portanto o conjunto-solução de $-3x + 12 > 0$ é $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$. Este processo não é o mais rápido neste caso, mas é essencial para resolver alguns tipos de inequações que virão adiante.

Podemos justificar os fatos mencionados acima através do teorema a seguir.

Teorema

Consideremos o binômio: $ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Seja x' a raiz do binômio.

Temos então:

$x > x' \Leftrightarrow ax + b$ tem o mesmo sinal de a
$x < x' \Leftrightarrow ax + b$ tem sinal contrário ao de a

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1ª) $a > 0$

Lembrando que $x' = -\dfrac{b}{a}$ temos:

$$\begin{cases} x > x' \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow ax + b > 0 \text{ (o mesmo sinal de a)} \\ x < x' \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow ax + b < 0 \text{ (sinal contrário de a)} \end{cases}$$

2ª) $a < 0$

$$\begin{cases} x > x' \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow ax + b < 0 \text{ (o mesmo sinal de a)} \\ x < x' \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow ax + b > 0 \text{ (sinal contrário de a)} \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

4.14) Resolva a inequação $\dfrac{2x-8}{-3x-6} < 0$.

Solução:

Em primeiro lugar, devemos impor $-3x - 6 \neq 0$, isto, $x \neq -2$.
Vamos agora fazer separadamente o estudo dos sinais do numerador (N) e do denominador (D):

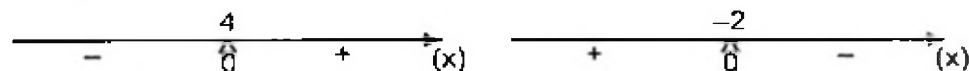
$N = 2x - 8$

$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Reta (x): − à esquerda de 4; 0 em $x = 4$; + à direita de 4.

$D = -3x - 6$

$-3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Reta (x): + à esquerda de −2; 0 em $x = -2$; − à direita de −2.

Em seguida reunimos o estudo feito dos sinais de:
$N = 2x - 8$ e $D = -3x - 6$ em uma única tabela, para obtermos os sinais de $\dfrac{N}{D} = \dfrac{2x-8}{-3x-6}$.

x	−∞	−2		4	+∞
N	−		−	0	+
D	+	0	−		−
$\frac{N}{D}$	−	⊗	+	0	−

A tabela nos dá:

a) para $x < -2$, $\dfrac{N}{D}$ é negativa.

b) para $-2 < x < 4$, $\frac{N}{D}$ é positiva.

c) para $x > 4$, $\frac{N}{D}$ é negativa.

As "bolinhas" servem para indicar as raízes das expressões e estamos usando o símbolo ⊗ para indicar que a expressão não está definida. Assim para $x = -2$, a expressão $\frac{N}{D}$ não está definida, pois -2 anula o denominador.

Como queremos $\frac{2x-8}{-3x-6} < 0$ o conjunto-solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$$

Se o problema pedisse para resolver a inequação $\frac{2x-8}{3x-6} \leq 0$, deveríamos acrescentar ao conjunto-solução anterior os valores que anulam a expressão. Mas para anular a expressão devemos anular o numerador, isto é, fazer $x = 4$. Assim, o conjunto-solução de $\frac{2x-8}{-3x-6} \leq 0$ é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

4.15) Resolva a inequação $(x-5)(3x-9)(-2x+8) < 0$

Solução:

Vamos primeiramente fazer o estudo dos sinais de cada fator:

$A = x - 5$
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$$\underset{-}{} \quad \overset{5}{0} \quad \underset{+}{} \quad (x)$$

$B = 3x - 9$
$3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$$\underset{-}{} \quad \overset{3}{0} \quad \underset{+}{} \quad (x)$$

$C = -2x + 8$
$-2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$$\underset{+}{} \quad \overset{4}{0} \quad \underset{-}{} \quad (x)$$

Em seguida reunimos tudo numa única tabela:

x	−∞	3		4		5	+∞
A	−		−		−	o	+
B	−	o	+		+		+
C	+		+	o	−		−
ABC	+	o	−	o	+	o	−

Queremos $(x - 5)(3x - 9)(-2x + 8) < 0$, isto é, $ABC < 0$
Portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 5\}$$

4.16) Resolva a inequação $\frac{x}{x-2} > 3$.

Solução:

Vamos reduzir os dois termos ao mesmo denominador (o mmc é igual a $x - 2$):

$$\frac{x}{x-2} > \frac{3(x-2)}{x-2}$$

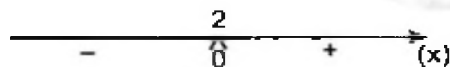
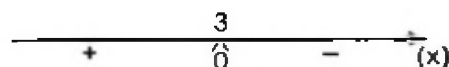
Antes de continuarmos, observe que neste caso não podemos "desprezar" o mmc $x - 2$. Isto porque desprezar o mínimo é equivalente a multiplicar todos os termos por $x - 2$ e não sabemos se $x - 2$ é positivo ou negativo e portanto não saberemos se devemos manter ou inverter o sentido da desigualdade. Quando o mmc é um número positivo não há problema em "desprezá-lo" (como fizemos, por exemplo, no exercício 4.2). Assim, sempre que em uma inequação houver denominador com variável, devemos manter o mmc. Continuemos agora com a resolução da inequação. Supondo $x - 2 \neq 0$ temos:

$$\frac{x}{x-2} > 3 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} > \frac{3(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3(x-2)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3x+6}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x-2} > 0$$

$N = -2x + 6$ | $D = x - 2$

$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ | $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$ 2 3 $+\infty$
N	+	+ 0 −
D	− 0 +	+
$\frac{N}{D}$	− ⊗ + 0 −

Como queremos $\frac{-2x+6}{x-2} > 0$, o conjunto-solução é:

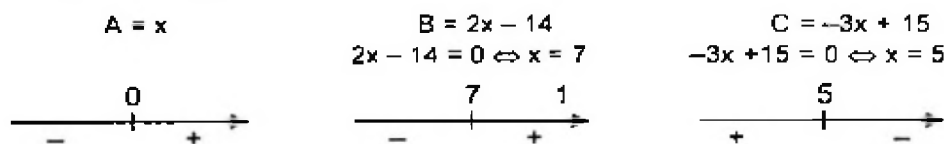
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

4.17) Resolva a inequação: $\dfrac{x(2x-14)}{-3x+15} \le 0$.

Solução:

Em primeiro lugar, devemos ter $-3x + 15 \neq 0$, isto é, $x \neq 5$.

$A = x$ | $B = 2x - 14$ | $C = -3x + 15$

$2x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ | $-3x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$	0		5		7	$+\infty$
A	–	0	+		+		+
B	–		–		–	0	+
C	+		+	0	–		–
$\frac{AB}{C}$	+	0	–	⊗	+	0	–

Para $\dfrac{x(2x-14)}{-3x+15} < 0$, devemos ter $0 < x < 5$ ou $x > 7$.

Para $\dfrac{x(2x-14)}{-3x+15} = 0$, devemos ter $x = 0$ ou $x = 7$.

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 5 \text{ ou } x \ge 7\}$$

Exercícios Propostos

4.18) Resolva as inequações:

a) $\dfrac{4x+16}{-2x+5} < 0$

b) $(x + 7)(3x - 1)(4x + 2) \ge 0$

c) $\dfrac{(x-2)(2x+6)}{x-5} \le 0$

d) $\dfrac{5}{x-3} < 6$

4.19) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 0 \\ (x-1)(5-x) > 0 \end{cases}$$

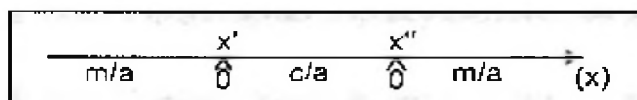
4.20) Dê o conjunto-verdade de $0 \le \dfrac{x-1}{x-2} < \dfrac{1}{4}$.

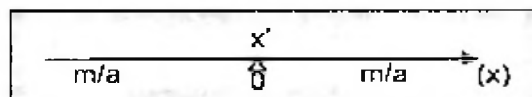
4.4 – SINAIS DE $ax^2 + bx + c$

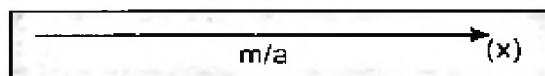
Consideremos o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são reais com $a \neq 0$. O valor numérico desse trinômio poderá ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor atribuído a x. Os valores que, substituidos no lugar de x, dão valor numérico nulo são as raizes do trinômio, isto é, as raizes do trinômio $ax^2 + bx + c$ são as raizes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Queremos fazer o estudo dos sinais de $ax^2 + bx + c$ e para tanto procederemos como no caso do binômio $ax + b$: primeiro apresentaremos as conclusões e depois faremos as demonstrações dessas conclusões.

Devemos considerar três casos:

1º) Suponhamos $\Delta > 0$. Neste caso o trinômio admite duas raizes reais e distintas, x' e x", e a tabela de sinais do trinômio é:

Esta tabela nos diz que:
- para x situado entre as raizes ($x' < x < x''$), o sinal do trinômio é contrário ao de a.
- para x situado fora do intervalo das raizes ($x < x'$ ou $x > x''$), o sinal do trinômio é o mesmo de a.

2º) Suponhamos agora $\Delta = 0$. Neste caso o trinômio tem duas raizes reais e iguais ($x' = x''$) e a tabela de sinais é:

Esta tabela nos informa que, para qualquer valor de x diferente da raiz (x'), o valor numérico do trinômio tem o mesmo sinal de a.

3º) Suponhamos $\Delta < 0$. Neste caso, o trinômio não tem raizes reais e a tabela de sinais é:

isto é, para qualquer valor de x, o valor numérico do trinômio terá o mesmo sinal de a.

Em resumo, temos:

Exemplos

a) Consideremos o trinômio $x^2 - 5x + 6$

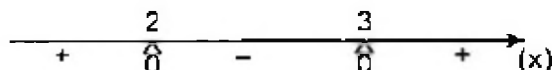
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$$

Neste caso $\Delta > 0$ e o trinômio tem duas raízes reais e distintas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Big\} \; x' = 2 \text{ e } x'' = 3$$

e como $a > 0$, a tabela de sinais é:

2 3

\+ 0 − 0 + (x)

De acordo com esse quadro, temos:

– para $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$
– para $2 < x < 3$, $x^2 - 5x + 6 < 0$
– para $x > 3$, $x^2 - 5x + 6 > 0$

Assim, se nos pedissem para resolvermos a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$, daríamos o seguinte conjunto-verdade:

$$V = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3 \}$$

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $x^2 - 5x + 6 < 0$, daríamos o seguinte conjunto-verdade:

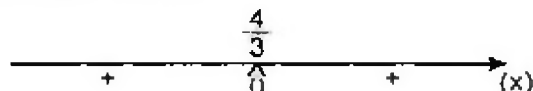
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

b) Consideremos o trinômio $9x^2 - 24x + 16$.

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = -24 \\ c = 16 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24}{18} = \frac{4}{3}$$

Temos então $\begin{cases} x' = x'' = \dfrac{4}{3} \\ a > 0 \end{cases}$

Portanto, a tabela de sinais é:

Vemos então que o valor numérico do trinômio é positivo para *qualquer* valor de x diferente de $\frac{4}{3}$.

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $9x^2 - 24x + 16 > 0$, daríamos o conjunto-verdade:

$$V = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $9x^2 - 24x + 16 < 0$, o conjunto-verdade seria

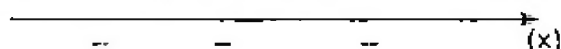
$$V = \varnothing$$

pois a tabela de sinais nos informa que o valor numérico do trinômio nunca será negativo.

c) Seja o trinômio $-3x^2 + 2x - 5$

$$\begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \\ c = -5 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-3)(-5) = -56$$

Temos aqui $\Delta < 0$ e $a < 0$. Portanto, o quadro de sinais é:

$$\xrightarrow{\quad - \qquad - \qquad - \quad} (x)$$

isto é, o trinômio será negativo para qualquer valor de x. Assim, podemos dizer que:

– o conjunto-solução da inequação $-3x^2 + 2x - 5 < 0$ é $S = \mathbb{R}$.

– o conjunto-solução da inequação $-3x^2 + 2x - 5 > 0$ é $V = \varnothing$.

Nos três teoremas a seguir vamos justificar o que dissemos acima. Para facilitar a notação, representaremos o trinômio $ax^2 + bx + c$ por y.

Teorema

Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são reais com $a \neq 0$ e $\Delta > 0$. Sejam x' e x'' suas raízes, com $x' < x''$. Então: $x < x'$ ou $x > x'' \Leftrightarrow$ y tem o mesmo sinal de a $x' < x < x'' \Leftrightarrow$ y tem sinal contrário ao de a

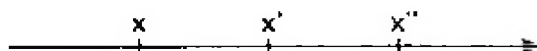
Demonstração:

Lembremos que o trinômio pode ser fatorado do seguinte modo:

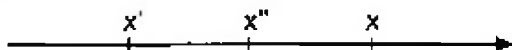
$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

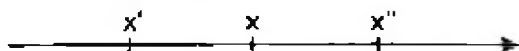
Portanto: $\dfrac{y}{a} = (x - x')(x - x'')$

– Suponhamos $x < x'$. Neste caso teremos também: $x < x''$ e portanto as duas diferenças $x - x'$ e $x - x''$

$$\xrightarrow{\quad x \quad x' \quad x'' \quad}$$

serão negativas. Assim, o produto $(x - x')(x - x'')$ será positivo, o que significa que $\dfrac{y}{a} > 0$. Mas, se $\dfrac{y}{a} > 0$, podemos garantir que y e a têm o mesmo sinal.

– Suponhamos $x > x'$. Neste caso também teremos $x > x'$ e portanto as diferenças $x - x'$ e $x - x''$

x'   x''   x

serão ambas positivas, o que significa que o produto $(x - x')(x - x'')$ será positivo. Assim, temos novamente $\frac{y}{a} > 0$ e portanto y e a têm o mesmo sinal.

– Suponhamos agora $x' < x < x''$. Neste caso teremos: $x - x' > 0$ e $x - x'' < 0$. Assim o produto $(x - x')(x - x'')$

será negativo, o mesmo acontecendo com $\frac{y}{a}$. Mas se $\frac{y}{a} < 0$, y e a têm sinais contrários.

Teorema

> Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$ e $\Delta = 0$.
> Seja x' sua raiz. Então: $x \neq x' \Leftrightarrow$ y tem o mesmo sinal de a.

Demonstração:

$$\frac{y}{a} = (x - x')(x - x'')$$

Mas como $x' = x''$, vem $\frac{y}{a} = (x - x')^2$

Para qualquer valor de x diferente de x', a expressão: $(x - x')^2$ será positiva e portanto $\frac{y}{a} > 0$. Daí concluímos que y e a têm o mesmo sinal.

Teorema

> Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são reais, com $a \neq 0$ e $\Delta < 0$. Neste caso y terá sempre o mesmo sinal de a.

Demonstração:

Neste caso o trinômio não tem raízes reais e assim sendo não usaremos $y = a(x - x')(x - x'')$.

Façamos então o seguinte:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Podemos então escrever: $\frac{y}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$.

Como estamos supondo $\Delta < 0$, temos $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ e, como consequência, para qualquer valor real de x, teremos: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Isto significa que $\frac{y}{a}$ será sempre positivo e portanto y e a têm o mesmo sinal.

Observação: Conforme vimos, podemos escrever:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (\text{com } a \neq 0).$$

A expressão $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ é chamada de **forma canônica** do trinômio do segundo grau e será usada novamente no capitulo 6 desde livro.

4.5 – INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Inequações do segundo grau são inequações que podem ser reduzidas a uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

onde: $\begin{cases} a \neq 0 \\ x \text{ é a variável} \\ a, b \text{ e } c \text{ são constante} \end{cases}$

Para resolvermos inequações do segundo grau, fazemos uso do estudo que fizemos do trinômio do segundo grau.

Exercicios Resolvidos

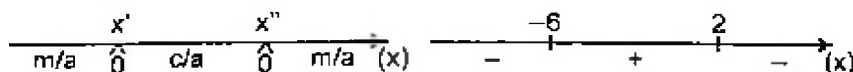
4.21) Resolva as inequações:

a) $-x^2 - 4x + 12 > 0$
b) $-x^2 - 4x + 12 < 0$
c) $-x^2 - 4x + 12 \leq 0$
d) $4x^2 - 20x + 25 > 0$
e) $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$
f) $4x^2 - 20x + 25 < 0$
g) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$
h) $-x^2 + 3x - 7 < 0$
i) $-x^2 + 3x - 7 > 0$
j) $x^2 > 4$

Solução:

a) Vamos, em primeiro lugar, determinar as raízes do trinômio $y = -x^2 - 4x + 12$ e em seguida fazer o estudo de seu sinal:

$$-x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ ou } x = 2$$

Temos: $\begin{cases} a = -1, \text{ isto é, } a < 0 \\ x' = -6 \\ x'' = 2 \end{cases}$

Portanto o trinômio assume valores numéricos positivos para x situado entre –6 e 2:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 2\} =]-6; 2[$

b) Aproveitando o estudo do item a temos:

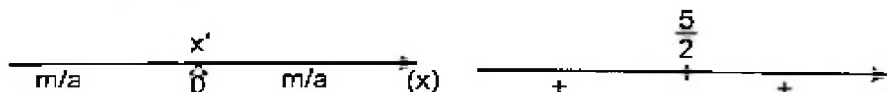
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \vee x > 2\}$$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \vee x \geq 2\}$

d) $y = 4x^2 - 20x + 25$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = -20 \\ c = 25 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(4)(25) = 0$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20}{2(4)} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Temos: $\begin{cases} a = 4, \text{ isto é, } a > 0 \\ \Delta = 0 \\ x' = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Portanto, o conjunto-verdade de $4x^2 - 20x + 25 > 0$ é

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

e) Aproveitando o estudo do item d temos:

$$V = \mathbb{R}.$$

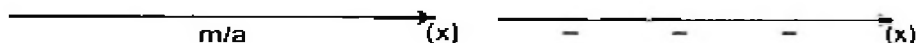
f) Trata-se do mesmo trinômio do item d. Agora queremos $y < 0$, o que a tabela de sinais diz ser impossível. Assim: $V = \varnothing$.

g) É o mesmo trinômio do exercício d, o qual nunca será negativo, mas poderá ser nulo. Assim, o conjunto-verdade de $y \leq 0$ é:

$$V = \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

h) $y = -x^2 + 3x - 7$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)(-7) = 9 - 28 = -19$$

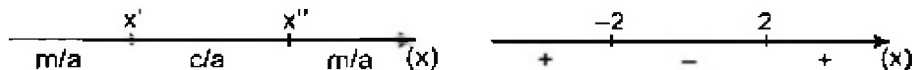
Temos então, $\Delta < 0$ e $a < 0$.

Portanto: $V = \mathbb{R}$

i) É o mesmo trinômio do exercício h, o qual será sempre negativo. Portanto, o conjunto-verdade de $-x^2 + 3x - 7 > 0$ é:

$$V = \varnothing$$

j) $x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$

$y = x^2 - 4$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac = 16 \\ x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{array} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ x' = -2 \\ x'' = +2 \end{cases}$$

Portanto: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

4.22) Resolva a inequação $\dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4)}{(-x^2 + 6x - 8)(x - 5)} \geq 0$.

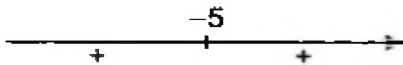
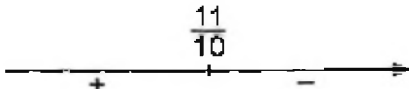
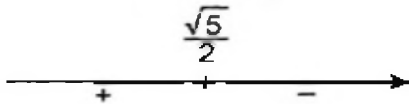
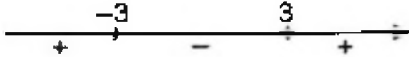
Solução:

Em primeiro lugar estudaremos o sinal de cada termo.

$A = x^2 - 4x + 3$ $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$ 1, 3 + – +	$B = x^2 - 4$ $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ –2, 2 + – +
$C = -x^2 + 6x - 8$ $-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$ 2, 4 – + –	$D = x - 5$ $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ 5 – + Repare que este termo é do 1º grau

Resumindo numa única tabela:

x	$-\infty$	-2		1		2		3		4		5	$+\infty$
A	+		+	0	−		−	0	+		+		+
B	+	0	−		−	0	+		+		+		+
C	−		−		−	0	+		+	0	−		−
D	−		−		−		−		−		−	0	+
$\frac{AB}{CD}$	+	0	−	0	+	⊗	+	0	−	⊗	+	⊗	−

Temos então:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 1 \leq x < 2 \text{ ou } 2 < x \leq 3 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

Ou também:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 3 \vee 4 < x < 5) \wedge x \neq 2\}$

4.23) Resolva $\dfrac{(x^2 + 10x + 25)(-10x + 11)}{(-2x + \sqrt{5})(x^2 - 9)} \leq 0$

Solução:

$A = x^2 + 10x + 25$

$x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

$B = -10x + 11$

$-10x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{10}$

$C = -2x + \sqrt{5}$

$-2x + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$D = x^2 - 9$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Antes de reunirmos numa única tabela, observemos que:

$\frac{\sqrt{5}}{2} \cong \frac{2{,}236}{2} \cong 1{,}118$ e $\frac{11}{10} = 1{,}1$

Portanto: $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{11}{10}$

x	$-\infty$	-5		-3		$\frac{11}{10}$		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		3	$+\infty$
A	+	o	+		+		+		+		+
B	+		+		+	o	−		−		−
C	+		+		+		+	o	−		−
D	+		+	o	−		−		−	o	+
$\frac{AB}{CD}$	+	o	+	⊗	−	o	+	⊗	−	⊗	+

Portanto:

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq \frac{11}{10} \vee \frac{\sqrt{5}}{2} < x < 3 \vee x = -5\}$$

4.24) Determine o valor de **k** de modo que a equação $4x^2 - kx + 9 = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

Solução:

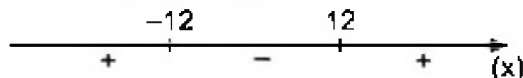
Devemos ter $\Delta > 0$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = k \\ c = 9 \end{cases} \qquad \Delta = (-k)^2 - 4(4)(9) = k^2 - 144$$

Portanto, devemos ter $k^2 - 144 > 0$

Para resolvermos esta inequação achamos em primeiro lugar as raízes de $k^2 - 144$.

$k^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 144 \Leftrightarrow k = \pm 12$

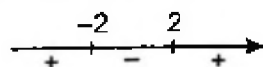
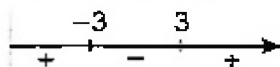
	-12		12		
+		−		+	(x)

Como queremos $k^2 - 144 > 0$, devemos ter:
$k < -12$ ou $k > 12$

4.25) Resolva a inequação $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$

Solução:

Em primeiro lugar fatoramos a expressão $x^4 - 13x^2 + 36$, como vimos no capítulo 3.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

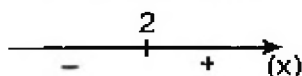
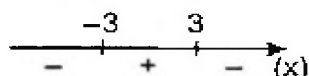
Assim, $x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9) < 0$

x	$-\infty$	-3		-2		2		3	$+\infty$
A	+		+	0	–	0	+		+
B	+	0	–		–		–	0	+
AB	+	0	–	0	+	0	–	0	+

Assim: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \lor 2 < x < 3\}$

4.26) Resolva a inequação $-x^3 + 2x^2 + 9x - 18 < 0$

Solução:

$-x^3 + 2x^2 + 9x - 18 = -x^2(x-2) + 9(x-2) = (x-2)(-x^2+9)$

Assim, devemos resolver a inequação $(x-2)(-x^2+9) < 0$

x	$-\infty$	-3		2		3	$+\infty$
A	–		–	0	+		+
B	–	0	+		+	0	+
AB	+	0	–	0	+	0	–

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

4.27) Determine o valor de **k** de modo que a sentença aberta $x^2 - kx + (k + 15) > 0$ seja verdadeira para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Queremos que o trinômio $x^2 - kx + (k + 15)$ seja sempre positivo, isto é, queremos que tenha sempre o mesmo sinal de a (observe que a = 1). Portanto, devemos impor $\Delta < 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -k \\ c = k + 15 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4(1)(k+15) = k^2 - 4k - 60$$

Devemos então resolver a inequação $k^2 - 4k - 60 < 0$. As raízes de $k^2 - 4k - 60$ são -6 e 10.
Assim, devemos ter $-6 < k < 10$

4.28) Determine os valores de **k** de modo que a inequação: $(k + 3)x^2 + kx + 1 > 0$ seja satisfeita para qualquer valor real de x (supor $k \neq -3$)

Solução:

$$\begin{cases} a = k + 3 \\ b = k \\ c = 1 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4(k+3) = k^2 - 4k - 12$$

Para que o trinômio $(k + 3)x^2 + kx + 1$ seja sempre positivo, devemos ter $a > 0$ e $\Delta < 0$.

$$\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow k + 3 > 0 \\ \Delta < 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k - 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{O conjunto-verdade de } k + 3 > 0 \text{ é } V_1 = \{k \in \mathbb{R} \mid k > -3\} \\ \text{O conjunto-verdade de } k^2 - 4k - 12 < 0 \text{ é } V_2 = \{k \in \mathbb{R} \mid -2 < k < \end{cases}$$

Sendo V o conjunto dos valores de **k** que nos servem, teremos: V =
Fazendo a operação obtemos:

$$V = \{k \in \mathbb{R} \mid -2 < k < 6\}$$

4.29) Seja: $y = \dfrac{(x^3 - 4)\sqrt{-x}}{x^2 - 9}$. Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais y é real.

Solução:

Para que y seja real, devemos ter $-x \geq 0$ e $x^2 - 9 \neq 0$. Neste caso, o valor numérico da expressão $x^3 - 4$ não importa. Sendo V_1 o conjunto-verdade de $-x \geq 0$, temos:

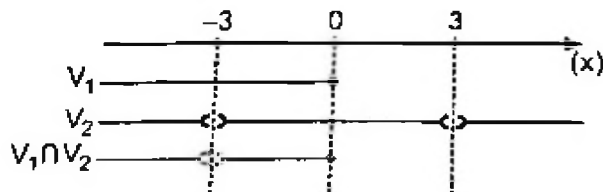
$$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

Seja V_2 o conjunto-verdade de: $x^2 - 9 \neq 0$.

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Sendo A o conjunto dos valores de x que nos servem, temos:

$$A = V_1 \cap V_2$$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -3 < x \leq 0\}$

Exercícios Propostos

4.30) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 7x - 8 < 0$
b) $x^2 - 7x - 8 \leq 0$
c) $x^2 - 7x - 8 > 0$
d) $x^2 - 7x - 8 \geq 0$
e) $x^2 - 6x + 9 > 0$
f) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
g) $x^2 - 6x + 9 < 0$
h) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
i) $x^2 - 4x + 6 > 0$
j) $x^2 - 4x + 6 \geq 0$
k) $x^2 - 4x + 6 < 0$
l) $x^2 - 4x + 6 \leq 0$
m) $-x^2 + 5x - 6 < 0$
n) $-x^2 + 5x - 6 > 0$
o) $x^2 - 1 \leq 0$
p) $-x^2 \geq -4x$
q) $4x^2 - 7x < 1 + 5x$

4.31) Resolva as inequações:

a) $3(2x - 3)^2 > 4x(2x - 9) + 43$

b) $\dfrac{x^2 - 3}{2} + \dfrac{x^2 - 5}{3} \leq \dfrac{1}{6}$

4.32) Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$

b) $\dfrac{(x-2)(x^2 - x - 12)}{-3x + 6} \geq 0$

c) $\dfrac{x(x^2 + 4x)}{x - 1} < 0$

d) $\dfrac{(x-3)^5(x+2)^{11}(x^2 - 3)}{(x^2 - 4x - 12)^7} \leq 0$

4.33) Resolva os sistemas:

a) $\dfrac{x-3}{x+4} - \dfrac{x-4}{2} > 0$

b) $\dfrac{x-5}{x+3} \leq \dfrac{x-8}{x-3}$

c) $\dfrac{x-5}{x+3} + \dfrac{x-8}{x-3} \geq \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x+3} \geq 0$

4.34) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{-x+2}{2x-7} > 0 \\ (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \end{cases}$

4.35) Determine o valor de p de modo que a equação $2x^2 - 2(p - 1)x + 5p = 0$ não admita raízes reais.

4.36) Determine o conjunto formado por todos os valores de **k** de modo que a expressão $(k - 8)x^2 + (k - 1)x - 1$ seja negativa para qualquer valor de **x** (suponha $k \neq 8$).

4.37) Determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a expressão $\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ resulta um número real.

4.6 – PROPRIEDADES

Neste item lembraremos mais algumas propriedades dos números reais que serão úteis na análise de outros tipos de equações e inequações.

$$P_4 \quad \boxed{a > b \wedge b > c \Leftrightarrow a > c} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esta é a propriedade transitiva da relação a > **b**.

$$P_5 \quad \boxed{\left.\begin{array}{c} a > b \\ \wedge \\ c > d \end{array}\right| \Rightarrow a + c > b + d} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Esta propriedade nos diz que podemos somar membro a membro desigualdades de *mesmo sentido*.

Exemplo

$$\left.\begin{array}{c} 5 > 2 \\ e \\ 7 > 4 \end{array}\right| \Rightarrow 5 + 7 > 2 + 4$$

$$P_6 \quad \boxed{\left.\begin{array}{c} a > b \\ \wedge \\ c > d \end{array}\right| \Rightarrow ac > bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$$

Esta propriedade nos diz que podemos multiplicar membro a membro desigualdades de *mesmo sentido* desde que todos os membros sejam positivos (ou alguns nulos).

Exemplo

$$\left.\begin{array}{c} 4 > 3 \\ e \\ 5 > 2 \end{array}\right| \Rightarrow 4(5) > 3(2)$$

$$P_7 \quad \boxed{a = b \Rightarrow a^2 = b^2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

De modo geral, a implicação $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ é verdadeira para *quaisquer* a e b (mesmo negativos). No entanto, a implicação "$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$" só é válida para a e b positivos ou nulos (o que é ressaltado no exemplo a seguir). Por isso a equivalência $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ é válida desde que a e b pertençam a $\mathbb{R}_+$.

Exemplo

A sentença $(-3)^2 = (3)^2$ é verdadeira, no entanto a sentença $-3 = 3$ é falsa. Portanto a sentença $(-3)^2 = 3^2 \Rightarrow -3 = 3$ é falsa.

$$P_8 \quad \boxed{a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Neste caso não é necessário que a e b sejam positivos (ou nulos).

De modo geral, a sentença "$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$" é verdadeira para *quaisquer* a e b desde que n seja *ímpar*. Quando n é *par* e diferente de zero a sentença só é válida para a e b pertencentes a $\mathbb{R}_+$. Assim temos as propriedades P_9 e P_{10}:

P_9 — Para n natural e ímpar temos:
$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

P_{10} — Para $n \in \mathbb{N}^*$ e n par temos:
$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

Para a desigualdade, há propriedades análogas a P_7, P_8, P_9 e P_{10}, que são as propriedades P_{11} e P_{12}:

P_{11} — Para n natural e ímpar temos:
$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

P_{12} — Para $n \in \mathbb{N}^*$ e n par temos:
$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

Exemplos

a) $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$

b) $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3, \forall a, b \in \mathbb{R}$

c) A sentença $3 > 2$ é verdadeira e no entanto a sentença $3^0 > 2^0$ é falsa. Daí a necessidade de se impor $n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) na propriedade P_{12}.

Exercícios Resolvidos

4.38) Sendo a e b números reais positivos quaisquer, demonstre que:

a) $a > b \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

b) $a^n > b^n \Rightarrow a > b \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

c) $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Solução:

a) Temos que: $\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \cdots\cdots \\ a > b \end{array}\right|$ n desigualdades.

Pela propriedade P_6 podemos multiplicar membro a membro essas desigualdades obtendo:

$\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores}} > \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n \text{ fatores}}$

isto é, $a^n > b^n$.

b) Temos, por hipótese, $a^n > b^n$. Suponhamos, provisoriamente, que $a \leq b$. Então:

$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ a \leq b \\ \cdots\cdots \\ a \leq b \end{array}\right|$ n desigualdades

$a^n \leq b^n$

Portanto $a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$, o que vai contra a hipótese ($a^n > b^n$). Portanto, supor $a \leq b$ nos leva a um absurdo e assim $a \leq b$ deve ser falsa. Como consequência, $a > b$ deve ser verdadeira.

c) Depois de demonstradas as propriedades dos itens a e b temos imediatamente:

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n.$$

4.39) Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Solução:

Os dois membros da desigualdade são positivos. Portanto:

$$\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{14} + 7 < 3 + 2\sqrt{18} + 6 \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14} < \sqrt{18} \Leftrightarrow 14 < 18$$

Como esta última sentença é obviamente verdadeira, também o é a primeira sentença.

Exercícios Propostos

4.40) Sendo **a**, **b** e **c** números reais quaisquer, dê o valor "verdadeiro" ou "falso":

a) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

b) $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$ (com $c \neq 0$)

c) $a > b \Rightarrow a^6 > b^6$

d) $a^6 > b^6 \Rightarrow a > b$
e) $a > b \Leftrightarrow a^6 > b^6$
f) $a > b \Rightarrow a^8 > b^8$
g) $a^8 > b^8 \Rightarrow a > b$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$
h) $a > b \Leftrightarrow a^8 > b^8$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$
i) $a > b \Rightarrow a^7 > b^7$
j) $a^7 > b^7 \Rightarrow a > b$
k) $a > b \Leftrightarrow a^7 > b^7$

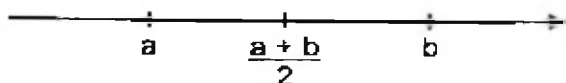
4.41) Considere os números reais a, b, x, y, z, tais que:
$a > b$, $x > y$ e $b + y > z$.
Demonstre que $a > z - x$

4.42) Demonstre que $\sqrt{2} + \sqrt{8} < \sqrt{3} + \sqrt{7}$

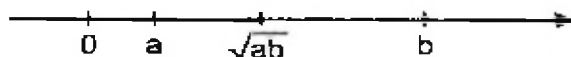
4.43) Sendo **a** e **b** números reais quaisquer, demonstre que:
a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $\qquad$ b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

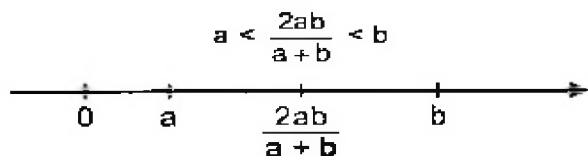
4.44) Dados dois números reais a e b, sua *média aritmética* é definida por $\frac{a+b}{2}$.
Supondo que $a < b$, prove que:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Observe que demonstrar isso é equivalente a mostrar que a média aritmética de dois números distintos está entre eles na reta, isto é, está no "meio".

4.45) Consideremos dois números reais a e b não-negativos. A *média geométrica* de a e b é o número m tal que $m^2 = ab$. Portanto observamos que $m = \pm\sqrt{ab}$. Para o caso particular em que $0 < a < b$, prove que

$$a < \sqrt{ab} < b$$

Note que demonstrar esse fato é equivalente a demonstrar que a *média geométrica positiva* de dois números reais distintos e não-negativos está "entre eles" na *reta*, isto é, está "no meio".

Obs.: Alguns autores definem a média geométrica apenas por $m = \sqrt{ab}$.

4.46) Consideremos dois números reais a e b não-nulos. Sua *média harmônica* é igual a $\frac{2ab}{a+b}$. Para o caso em que: $0 < a < b$, demonstre que:

4.47) Consideremos dois números reais positivos e distintos **a** e **b**. Sejam.

m_A = média aritmética de a e b

m_G = média geométrica positiva de a e b

m_H = média harmônica de a e b

Prove que: $m_H < m_G < m_A$

4.7 – MÓDULO

Definição

Consideremos um número real x. O **módulo de x** é um número representado por |x| e obtido do seguinte modo:

1º) Se x é positivo ou nulo, o seu módulo é **ele mesmo**.

Exemplos

a) O módulo de +5 é igual a +5, isto é, |+5| = +5
b) O módulo de 7, é igual a 7, isto é, |7| = 7
c) O módulo de 0 é igual a 0, isto é, |0| = 0

2º) Se x é negativo, o seu módulo é obtido **trocando o seu sinal**.

Exemplos

a) O módulo de –5 é +5, isto é, |–5| = +5
b) O módulo de –7 é +7, isto é, |–7| = +7
c) |–8| = +8
d) |+8| = |–8| = +8

Exemplos

a) Para x > 0 temos |x| = x
b) Seja x = –3. Temos:
   |x| = |–3| = +3 = –(–3) = –(x)
   isto é, |x| = –x
c) De modo geral temos: para x < 0, |x| = –x
d) Se x = 0 tanto faz dizer que |x| = x como

$$|x| = -x, \text{ pois } +0 = -0$$

Da definição decorre que |x| nunca é negativo, isto é,

$$\forall x, \ |x| \geq 0$$

A definição de módulo pode ser dada de modo mais formal:

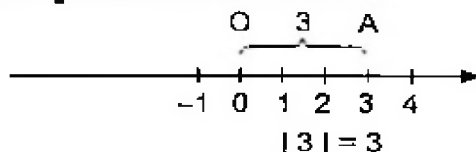
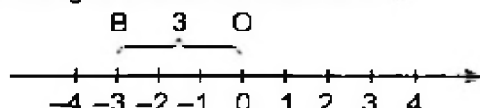
Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos:
$x \geq 0 \Leftrightarrow \lvert x \rvert = x$
$x \leq 0 \Leftrightarrow \lvert x \rvert = -x$

O "módulo de x" pode ser chamado também de "valor absoluto de x".

Interpretação Geométrica

Sabemos que o número real x está associado a um ponto da reta. Podemos interpretar o *módulo de x* como sendo a **distância** do ponto que representa x ao ponto que representa o número 0.

Exemplos

a) No esquema abaixo o número real 3 está associado ao ponto A. O módulo de 3 é igual à distância entre A e 0.

b) No esquema abaixo, o número real –3 está associado ao ponto B. O módulo de –3 é igual à distância entre B e 0.

Algumas Propriedades

Sendo x e y números reais quaisquer, temos:

M_1 $\lvert x \rvert = \lvert -x \rvert$	M_4 $\lvert x \rvert^2 = x^2$
M_2 $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$	M_5 $\lvert x \rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
M_3 $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert} (y \neq 0)$	M_6 $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$

As propriedades acima são todas imediatas; no entanto, a propriedade M_6 merece um comentário. Suponhamos por exemplo x = 5. Temos:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 = |5| = |x|$$

Suponhamos agora x = –5:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5| = |x|$$

Exercícios Resolvidos

4.48) Calcule:

a) $|5 - 2|$ f) $|-2| + |5|$

b) $|2 - 5|$
c) $|-2 - 5|$
d) $|-2 + 5|$
e) $|2 + 5|$
g) $|3 - 5| + |2 - 11|$
h) $4 + 3\,|2 - 9| - |-5|$
i) $|4 + |5 - 3||$

Solução:

a) $|5 - 2| = |3| = 3$
b) $|2 - 5| = |-3| = 3$
c) $|-2 - 5| = |-7| = 7$
d) $|-2 + 5| = |3| = 3$
e) $|2 + 5| = |7| = 7$
f) $|-2| + |5| = 2 + 5 = 7$
g) $|3 - 5| + |2 - 11| = |-2| + |-9| = 2 + 9 = 11$
h) $4 + 3\,|2 - 9| - |-5| = 4 + 3\,|-7| - (5) = 4 + 3(7) - 5 = 4 + 21 - 5 = 20$
i) $|4 + |5 - 3|\,| = |4 + |2|\,| = |4 + 2| = 6$

4.49) Dê o valor verdadeiro ou falso:
a) $|4 - 7| = |7 - 4|$
b) $|4 + 5| = |4| + |5|$
c) $|(-3) + (-8)| = |-3| + |-8|$
d) $|(-3) + (8)| = |-3| + |8|$
e) $\left|\frac{4}{5}\right| = \frac{|4|}{|5|}$
f) $|(4)\,(5)| = |4| \cdot |5|$
g) $x - 3 < 0 \Rightarrow |x - 3| = -x + 3$
h) $2x + 4 \geq 0 \Rightarrow |2x + 4| = 2x + 4$
i) $\left|\sqrt{3} - \sqrt{7}\right| = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

Solução:

a) V
b) V
c) V
d) F
e) V
f) V
g) V
h) V
i) V

4.50) Resolva as equações:
a) $|x| = 4$
b) $|x| = 0$
c) $|x| = -5$

Solução:

a) Sabemos que $|4| = 4$ e $|-4| = 4$. Portanto, os valores que satisfazem a equação $|x| = 4$ são 4 e -4, isto é,

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4$$
$$V = \{4; -4\}$$

b) O único número real que tem módulo igual a zero é o próprio zero. Portanto:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$V = \{0\}$$

c) O módulo de um número real não pode ser negativo e portanto a equação $|x| = -5$ não tem solução.

$$V = \varnothing$$

4.51) Calcule:

a) $|7-3|$
b) $|3-7|$
c) $|-4+6|$
d) $|(-5)+2-(-8)|$
e) $||3|-|-9||$
f) $|4-7|-|-12|$

4.52) Dê o valor "verdadeiro" ou "falso":

a) $|3| = |-3|$
b) $|x| = |-x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$
c) Se $x = 3$ e $y = 5$, então $|x+y| = |x| + |y|$
d) Se $x = -3$ e $y = 5$, então $|x+y| = |x| + |y|$
e) Se $x = -3$ e $y = -5$, então $|x+y| = |x| + |y|$
f) Se $x = +3$ e $y = -5$, então $|x+y| < |x| + |y|$
g) Se $x = -3$ e $y = 5$, então $|x+y| \leq |x| + |y|$
h) $4x - 7 < 0 \Rightarrow |4x-7| = 7 - 4x$
i) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{10}\right| = \frac{9}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.53) Resolva as equações:

a) $|x| = 7$
b) $|x| = -7$
c) $|x| = 0$

4.8 – EQUAÇÕES ENVOLVENDO MÓDULO

As equações envolvendo módulo são resolvidas usando a definição de módulo e as propriedades a seguir.

Sejam x e y números reais quaisquer. Sendo a um número real tal que $a \geq 0$, temos:

M_7 $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
M_8 $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
M_9 $|x| = a \Leftrightarrow x^2 = a^2$
M_{10} $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$

Para justificar M_9 e M_{10} basta que lembremos da propriedade P_7 do item 4.6 deste capítulo, isto é,

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2,\ \forall a, \in \mathbb{R}.$$

No caso da M_9, lembrando que $|x|^2 = x^2$ e que $a \geq 0$ temos:

$$|x| = a \Leftrightarrow |x|^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2$$

De modo semelhante podemos justificar M_{10}.

Exercícios Resolvidos

4.54) Resolva a equação $|x| = 7$

Solução:

1º modo

$|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7 \therefore V = \{7; -7\}$

2º modo

Aplicando a propriedade M_9, temos:

$|x| = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7^2 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7 \therefore V = \{7; -7\}$

4.55) Resolva a equação $|x - 2| = 6$

Solução:

1º modo

$|x - 2| = 6 \Leftrightarrow x - 2 = 6$ ou $x - 2 = -6 \Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -4 \therefore V = \{8; -4\}$

2º modo

$|x - 2| = 6 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 36 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 32 = 0.$

Resolvendo esta última equação, obtemos $x' = -4$ e $x'' = 8$

Assim: $V = \{8; -4\}$

Podemos observar que o 2º modo em geral não será muito vantajoso.

4.56) Resolva a equação $|x - 3| = |4x - 1|$

Solução:

1º modo

$$|x - 3| = |4x - 1| \Leftrightarrow x - 3 = 4x - 1 \text{ ou } x - 3 = -(4x - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 4x = 3 - 1 \text{ ou } x - 3 = -4x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{5}$$
$$V = \left\{\frac{-2}{3}; \frac{4}{5}\right\}$$

2º modo

$|x - 3| = |4x - 1| \Leftrightarrow (x - 3)^2 = (4x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 16x^2 - 8x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 15x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolvendo esta última equação, obtemos $x' = -\frac{2}{3}$ e $x'' = \frac{4}{5}$.

4.57) Resolva a equação $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

Solução:

Notando que $x^2 = |x|^2$ podemos escrever: $|x|^2 - 3|x| - 28 = 0$. Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, a equação fornecida transforma-se em: $y^2 - 3y - 28 = 0$. Resolvendo esta última equação, obtemos: $y' = 7$ e $y'' = -4$.

Já que $|x| = y$, vem:

$$\begin{cases} \text{para } y = 7,\ |x| = 7 \text{ e portanto } x = \pm 7 \\ \text{para } y = -4,\ |x| = -4 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Portanto: $V = \{7; -7\}$

4.58) Resolva a equação $|3x + 9| = 1 - x$

Solução:

Para que a equação tenha solução devemos ter $1 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 1$. Supondo esta condição válida temos:

$$|3x + 9| = 1 - x \Leftrightarrow 3x + 9 = 1 - x \text{ ou } 3x + 9 = -1 + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -5$$

Tanto -2 como -5 satisfazem a condição $x \leq 1$ e portanto temos:

$$V = \{-2; -5\}$$

4.59) Resolva a equação $|2x - 1| = 5x + 3$

Solução:

Devemos ter $5x + 3 \geq 0$, isto é, $x \geq -\frac{3}{5}$. Supondo esta condição válida, temos:

$$|2x - 1| = 5x + 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5x + 3 \text{ ou } 2x - 1 = -5x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{2}{7}$$

O valor $x = -\frac{2}{7}$ satisfaz a condição $x \geq -\frac{3}{5}$, porém $x = -\frac{4}{3}$ não satisfaz e portanto não é solução da equação. O conjunto-solução é então:

$$S = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$$

4.60) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 6| = 13$

Solução:

Façamos em primeiro lugar os estudos dos sinais de $x - 1$ e $x + 6$.

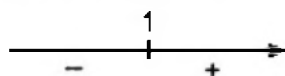
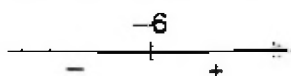
$A = x - 1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(reta: 1; − à esquerda, + à direita)

$B = x + 6$

$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

(reta: −6; − à esquerda, + à direita)

$$\begin{cases} \text{para } x \leq 1 \text{ temos } x - 1 \leq 0 \text{ e portanto } |x - 1| = -x + 1 \\ \text{para } x \geq 1 \text{ temos } x - 1 \geq 0 \text{ e portanto } |x - 1| = x - 1 \\ \text{para } x \leq -6 \text{ temos } x + 6 \leq 0 \text{ e portanto } |x + 6| = -x - 6 \\ \text{para } x \geq -6 \text{ temos } x + 6 \geq 0 \text{ e portanto } |x + 6| = x + 6 \end{cases}$$

x	$-\infty$ -6 1 $+\infty$		
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$
$\|x + 6\|$	$-x - 6$	$x + 6$	$x + 6$

Temos então três casos a considerar:

1º) $x \leq -6 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = -x+1 \\ |x+6| = -x-6 \end{cases}$

Portanto a equação $|x - 1| + |x + 6| = 13$ transforma-se em

$$-x + 1 - x - 6 = 13$$
$$-2x = 18$$
$$x = -9$$

O valor $x = -9$ satisfaz a condição $x \leq -6$, portanto é solução

2º) $-6 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = -x+1 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$

Para este caso a equação transforma-se em:

$$-x + 1 + x + 6 = 13$$
$$7 = 13 \text{ (absurdo)}$$

Portanto, não há solução no intervalo $[-6; 1]$

3º) $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$

Temos então:

$$x - 1 + x + 6 = 13$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

O valor $x = 4$ satisfaz a condição $x \geq 1$ e portanto é solução.
Assim, obtemos: $V = \{-9; 4\}$

4.61) Resolva a equação $4|x| - 3 = 5$

Solução:

$4|x| - 3 = 5 \Leftrightarrow 4\,|x| = 5 + 3 \Leftrightarrow 4\,|x| = 8 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$$V = \{2; -2\}$$

Exercícios Propostos

4.62) Resolva as equações:

a) $|x - 8| = 9$

b) $|x^2 - 1| = 7$

c) $3|4x - 9| - 1 = 0$

d) $4|x - 3| = 13$

e) $|5 - x| = |4x + 12|$

f) $4|x| - \dfrac{5}{|x|} = \dfrac{11}{2}$

g) $|x^2 - 4x| = |x - 6|$

h) $|3x - 5| \cdot (4x^2 - 1) = 0$

i) $|3 - |4x - 1|| = 6$

j) $|7x - 1| + 3 = 0$

4.63) Resolva as equações:

a) $3x^2 - 10|x| - 8 = 0$

b) $(x - 3)^2 + |x - 3| - 12 = 0$

4.64) Resolva as equações:

a) $|3x - 1| = 6x + 2$

b) $|5x + 6| = 3x - 1$

c) $|x^2 - 6x| = 2x - 12$

4.65) Resolva as equações:

a) $|2x - 6| + |3x + 4| = 11$

b) $|x + 4| + |x + 7| = 3$

c) $|x - 1| - |2x + 6| + 2|x - 4| = 13$

4.66) Resolva o sistema

$$\begin{cases} |3x + 4| = 2y \\ |2x - 1| = y \end{cases}$$

4.9 – INEQUAÇÕES ENVOLVENDO MÓDULO

As inequações envolvendo módulo podem ser resolvidas com o auxílio das propriedades a seguir:

M_{11}

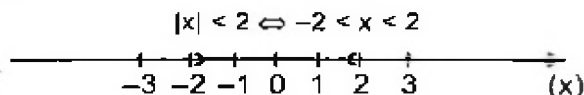
Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ temos:
$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Exemplo

Consideremos a inequação $|x| < 2$.

Os valores que satisfazem essa inequação estão entre -2 e 2:

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

−3 −2 −1 0 1 2 3 (x)

Assim o conjunto-verdade de $|x| < 2$ é:

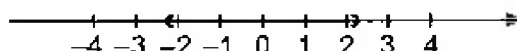
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} =]-2; 2[$$

M_{12}

Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ temos:
$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$

Exemplo

Seja a inequação $|x| > 2$. Temos:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ou } x < -2$$

Portanto o conjunto-verdade desta inequação é:

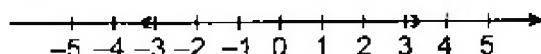
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -2\} =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$$

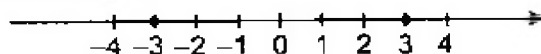
Exercícios Resolvidos

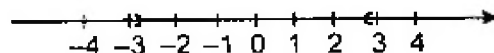
4.67) Resolva as inequações:

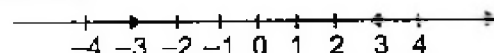
a) $|x| > 3$
b) $|x| \geq 3$
c) $|x| < 3$
d) $|x| \leq 3$
e) $|x| > -3$
f) $|x| < -3$
g) $|x| > 0$
h) $|x| < 0$
i) $|x| \geq 0$
j) $|x| \leq 0$
k) $\sqrt{x^2} > 4$

Solução:

a) $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ou $x < -3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \vee x < -3\}$

b) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3$ ou $x \leq -3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3\}$

c) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\} =]-3; 3[$

d) $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3]$

e) $|x| > -3$
Como $|x| \geq 0$, $|x| > -3$ será sempre verdadeira.
Portanto: $V = \mathbb{R}$

f) $|x| < -3$
Como $|x| \geq 0$, $|x| < -3$ será sempre verdadeira e assim: $V = \varnothing$.

g) Sabemos que $|x| \geq 0$. Portanto a inequação $|x| > 0$ será satisfeita para qualquer $x \neq 0$

$$V = \mathbb{R}^*$$

h) $|x| < 0$ não é satisfeita para nenhum número real: $V = \varnothing$.

i) Sabemos que $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $V = \mathbb{R}$.

j) Como $|x|$ não pode ser negativo, o único número real que satisfaz $|x| \leq 0$ é 0.

$$V = \{0\}$$

k) $\sqrt{x^2} = |x|$ e assim temos:

$\sqrt{x^2} > 4 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow x > 4$ ou $x < -4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \vee x < -4\}$

4.68) Resolva as inequações:

a) $|x + 3| \leq 5$

b) $3|x - 3| - 2 > 0$

c) $\sqrt{(x-1)^2} > 6$

Solução:

a) $|x + 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 3 \leq +5 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 2\} = [-8, 2]$

b) $3|x - 3| - 2 > 0 \Leftrightarrow 3|x - 3| > 2 \Leftrightarrow |x - 3| > \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x - 3 > \frac{2}{3}$ ou $x - 3 < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \frac{11}{3}$ ou $x < \frac{7}{3}$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{3} \text{ ou } x < \frac{7}{3}\right\}$$

Resolva a inequação: $x^2 - 5|x| + 6 > 0$

Solução:

1º modo

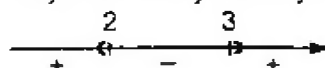
Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, temos: $x^2 = |x|^2 = y^2$. Lembrando que $|x| \geq 0$, isto é, $y \geq 0$, temos:

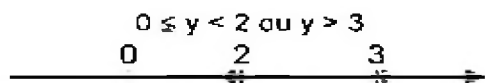
$$x^2 - 5|x| + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 6 > 0 \\ \text{e} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

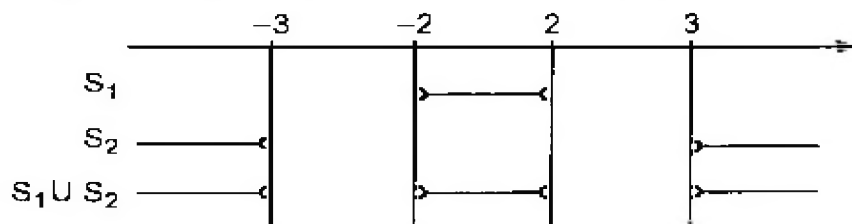
Vamos primeiramente resolver $y^2 - 5y + 6 > 0$

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = 3.$$

2 3

\+ − +

Portanto: $y^2 - 5y + 6 > 0 \Leftrightarrow y < 2$ ou $y > 3$
Porém, como devemos ter $y \geq 0$, os valores de y que nos servem são os que satisfazem:

$$0 \leq y < 2 \text{ ou } y > 3$$

Portanto: $x^2 - 5|x| + 6 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |x| < 2 \\ \text{ou} \\ |x| > 3 \end{cases}$

Mas: $\begin{cases} 0 \leq |x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 & (S_1) \\ |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \text{ ou } x < -3 & (S_2) \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

2º modo

Consideremos dois casos: $x \geq 0$ ou $x \leq 0$

1º) $x \geq 0$

Neste caso $|x| = x$ e a inequação pode ser escrita:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

Seja: $\begin{cases} V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\} \end{cases}$

Assim, um primeiro conjunto de valores que servem é:

$A = V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

2º) $x \leq 0$

Neste caso temos $|x| = -x$ e a inequação pode ser escrita:

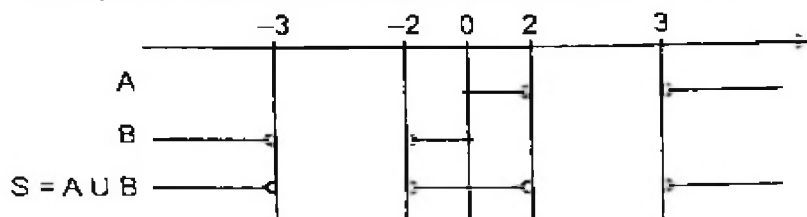
$x^2 + 5x + 6 > 0$

$x^2 + 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ou $x > -2$

Sejam: $\begin{cases} V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \\ V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -2\} \end{cases}$

Um outro conjunto de valores que nos servem é:

$B = V_3 \cap V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x \leq 0\}$

O conjunto-solução da inequação proposta será $S = A \cup B$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

4.70) Resolva a inequação: $|2x - 6| > x - 4$.

Solução:

Façamos duas hipóteses:

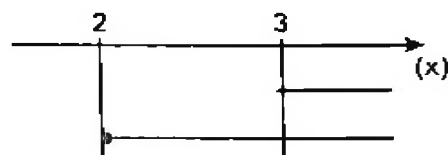
1ª) $2x - 6 \geq 0$

$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$

Portanto, para $2x - 6 \geq 0$, isto é, para $x \geq 3$ temos:

$|2x - 6| = 2x - 6$

e a inequação transforma-se em:

$2x - 6 > x - 4$
$2x - x > 6 - 4$
$x > 2$

Porém, como estamos trabalhando com $x \geq 3$, temos que um primeiro conjunto de valores que satisfazem a inequação proposta é:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

2ª) $2x - 6 < 0$

$2x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$

Portanto, para $2x - 6 < 0$, isto é, para $x < 3$, teremos:

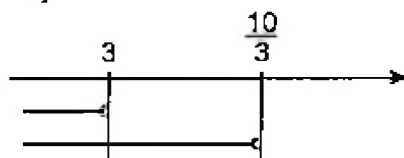
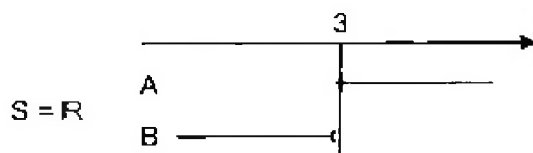
$|2x - 6| = -2x + 6$

Assim, a inequação proposta transforma-se em:

$-2x + 6 > x - 4$

$-2x + 6 > x - 4 \Leftrightarrow -3x > -10 \Leftrightarrow x < \frac{10}{3}$

Lembrando que estamos trabalhando com $x < 3$, temos que um outro conjunto de valores que satisfazem a inequação é:

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

Assim, o conjunto-solução da inequação proposta é: $S = A \cup B = \mathbb{R}$

4.71) Resolva a inequação: $|3x - 12| + |5 - x| < 12$.

Solução:

Façamos em primeiro lugar o estudo dos sinais de $|3x - 12|$ e $|5 - x|$.

$3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$ 4	5	$+\infty$
$3x - 12$	−	+	+
$\lvert 3x - 12 \rvert$	$-3x + 12$	$3x - 12$	$3x - 12$
$5 - x$	+	+	−
$\lvert 5 - x \rvert$	$5 - x$	$5 - x$	$-5 + x$

Temos então três regiões a considerar:

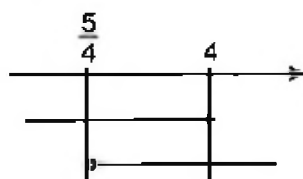
1ª) $x \leq 4$

Para estes valores de x temos $|3x - 12| = -3x + 12$ e $|5 - x| = 5 - x$. Assim a inequação proposta transforma-se em:

$$-3x + 12 + 5 - x < 12 \Leftrightarrow -4x < -5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$$

Como estamos trabalhando com $x \leq 4$, um primeiro conjunto de valores que satisfazem é:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{4}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$$

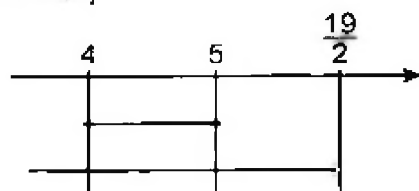
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} < x \leq 4\}$$

2º) $4 \leq x \leq 5$

$|3x - 12| = 3x - 12$ e $|5 - x| = 5 - x$

$3x - 12 + 5 - x < 12$

$2x < 19$

$x < \dfrac{19}{2}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$

3º) $x \geq 5$

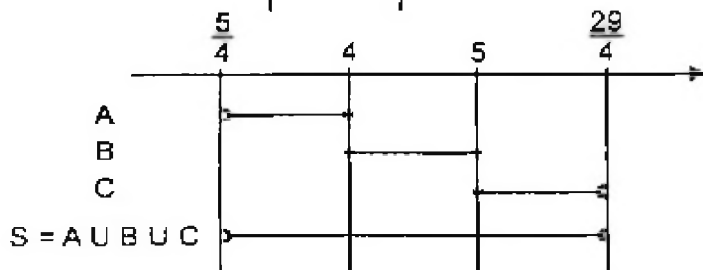
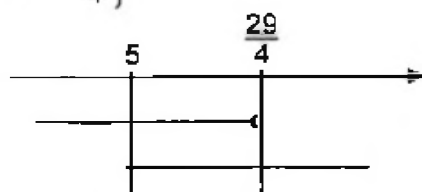
$|3x - 12| = 3x - 12$

$|5 - x| = -5 + x$

$3x - 12 - 5 + x < 12$

$4x < 29$

$x < \dfrac{29}{4}$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < \frac{29}{4}\right\}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} < x < \frac{29}{4} \right\}$$

Exercícios Propostos

4.72) Resolva as inequações:

a) $|x| > 6$
b) $|x| \geq 6$
c) $|x| < 6$
d) $|x| \leq 6$
e) $|x| > -6$
f) $|x| \geq -6$
g) $|x| < -6$
h) $|x| \leq -6$

4.73) Resolva as inequações:

a) $|3x - 5| > 2$
b) $|3x - 5| \geq 2$
c) $|3x - 5| < 2$
d) $|3x - 5| \leq 2$
e) $|3x - 5| > -3$
f) $|3x - 5| \geq -3$
g) $|3x - 5| < -3$
h) $|3x - 5| \leq -3$
i) $|3x - 5| > 0$
j) $|3x - 5| \geq 0$
k) $|3x - 5| < 0$
l) $|3x - 5| \leq 0$

4.74) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-2)^2} > 7$
b) $5\,|3x + 8| - 6 < 1$
c) $|2x - 6| - 3 \leq 0$
d) $|x^2 - 3x| < 10$

4.75) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 2\,|x| - 24 < 0$
b) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$
c) $|2x - 3| + |2x - 5| \geq 6$

4.76) Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 16) \cdot |x - 6| > 0$
b) $(x^2 - 16) \cdot |3x - 6| \geq 0$
c) $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{|x^2 - 4|} \leq 0$
d) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{|x - 4|} \leq 0$

4.10 – PROPRIEDADES DO MÓDULO

Além das propriedades já apresentadas, há mais algumas importantes que serão apresentadas a seguir.

M_{13}

Sendo x um número real qualquer
$-\|x\| \leq x \leq \|x\|$

Exemplos

a) Seja $x = +3$. Teremos $-|3| \leq 3 \leq |3|$, isto é, $-3 \leq 3 \leq 3$ que é obviamente verdadeira.

b) Seja $x = -3$. Teremos: $-|-3| \leq -3 \leq |-3|$, isto é, $-3 \leq -3 \leq 3$ que é verdadeira.

c) Seja $x = 0$. Teremos $-|0| \leq 0 \leq |0|$, isto é, $0 \leq 0 \leq 0$, que é também verdadeira.

M_{14}

> Sendo x e y números reais quaisquer
> $|x + y| \leq |x| + |y|$

Esta é a chamada **desigualdade triangular** e a razão do nome é entendida quando se faz o estudo dos *números complexos* (ver volume 7 desta coleção).

Exemplos

a) Se x e y são ambos negativos ou ambos positivos, vale

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Assim, por exemplo, temos:

$$|4 + 7| = |4| + |7|$$
$$|(-4) + (-7)| = |-4| + |-7|$$

b) Se $x = 0$ ou $y = 0$, teremos também $|x + y| = |x| + |y|$. Assim, por exemplo,

$$|7 + 0| = |7| + |0|$$
$$|(-7) + 0| = |-7| + |0|$$

c) Se x e y são diferentes de zero e de sinais contrários, teremos:

$$|x + y| < |x| + |y|$$

Assim, por exemplo, temos:

$$|(5) + (-2)| < |5| + |-2|$$
$$|(-7) + (3)| < |-7| + |3|$$

M_{15}

> Sendo x e y números reais quaisquer, temos:
> $$|x + y| \geq |x| - |y|$$
> $$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Exercícios Resolvidos

4.77) Demonstre que é verdadeira a desigualdade triangular.

Solução:

Há vários processos de fazer essa demonstração. Um deles poderia ser verificar que a desigualdade é verdadeira para cada um dos seguintes casos:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$
$$x \leq 0 \text{ e } y \leq 0$$

$$x \geq 0 \text{ e } y \leq 0$$
$$x \leq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Porém este processo é muito demorado e assim apresentaremos, a seguir, 3 processos mais rápidos.

1º processo

Podemos fazer 2 hipóteses a respeito de **x + y**:

$$x + y \geq 0 \text{ ou } x + y < 0$$

1º caso:

$$x + y \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y \\ x \leq |x| \text{ e } y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

2º caso: $x + y < 0$

$$x + y < 0 \Rightarrow -x - y > 0 \xrightarrow{1^\circ \text{ caso}} |-x - y| \leq |-x| + |-y|$$

Como:

$$\begin{cases} |-x - y| = |x + y| \\ |-x| = |x| \\ |-y| = |y| \end{cases}$$

Vem:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

2º processo

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\}$$ Somando membro a membro, obtemos:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

ou $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \qquad$ (I)

Observando que $|x| + |y| \geq 0$, vemos que a desigualdade (I) é do tipo:

$$-m \leq k \leq m \quad (\text{com } m \geq 0)$$

e de acordo com a propriedade M_{11}, temos:

$$-m \leq k \leq m \Leftrightarrow |k| \leq m$$

Assim, concluímos que a desigualdade (I) é equivalente a:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

3º processo

De acordo com M_{13}, temos

$$xy \leq |xy|$$

Porém $|xy| = |x| \, |y|$ e assim temos $xy \leq |x| \cdot |y|$

$xy \leq |x| \cdot |y| \Leftrightarrow 2xy \leq 2\,|x|\,|y| \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|x|\,|y| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\,|x||y| \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$

Neste ponto devemos nos lembrar que, de acordo com a propriedade P_{12} do item 4.6, temos:

$$m^2 \leq n^2 \Leftrightarrow m \leq n \quad (\text{para } m \geq 0 \text{ e } n \geq 0).$$

Como $|x + y| \geq 0$ e $|x| + |y| \geq 0$, aplicando P_{12} vem:

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

4.78) Demonstre que, $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, quaisquer que sejam os números reais x, y e z.

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = (x - z) + (z - y) \Rightarrow |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \\ |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

Exercícios Propostos

4.79) Sendo x e y números reais quaisquer, demonstre que:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$

b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

c) $|x + y| \geq |x| - |y|$

4.80) Sendo x, y e z reais quaisquer, demonstre que $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

4.81) Sendo x, y, a, b e k números reais quaisquer, demonstre que:
$|x - a| < k$ e $|y - b| < k \Rightarrow |(x + y) - (a - b)| < 2k$

Exercícios Suplementares

II.1) Determine os valores do parâmetro a, tais que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x - 4y = a - 13 \end{cases}$$

admita soluções (x; y), de modo que: $x < 0$ e $y > 0$.

II.2) Sejam os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 < 0\}$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \dfrac{x+1}{2} \leq 4\}$

Determine:

a) C_M^A

b) $[(A \cap B) - M]$

c) $C_M^{(A \cap B)}$

II.3) Resolva a equação $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 1} = 1$.

II.4) Resolva a equação $\sqrt{2x+3} = \sqrt{5x+8} - \sqrt{3x+5}$.

II.5) Resolva a inequação $|2x + 4| > |x - 1|$.

II.6) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 12 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z} = -6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = -12 \end{cases}$$

II.7) Fatore a expressão $x^8 - 17x^4 + 16$.

II.8) Resolva a inequação $x^8 - 17x^4 + 16 < 0$.

II.9) Resolva a inequação $\dfrac{x^8 - 17x^4 + 16}{1 - 4x^2} \leq 0$.

II.10) Sendo x' e x" as raízes da equação $3x^2 + 8x - 2 = 0$, calcule o valor de $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$.

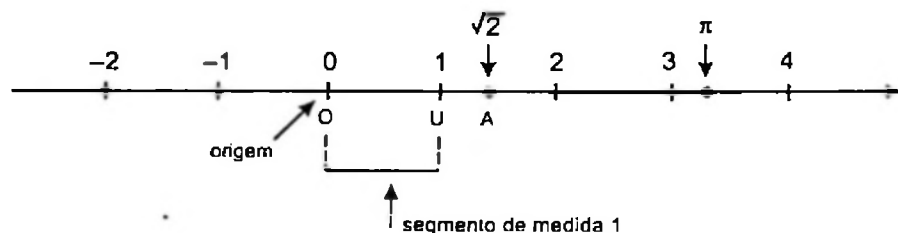
PARTE III

Capítulo 5 – **Relações**

Capítulo 6 – **Função real de variável real**

5.1 – COORDENADAS NO PLANO

Eixo

Eixo é uma reta orientada sobre a qual se fixou uma *escala*.

Para se obter um eixo, marcamos sobre uma reta dois pontos, O e U, de tal forma que o segmento OU tenha *medida igual a 1*.

A reta recebe, então, uma orientação: convencionamos que o sentido de O para **U** é o **sentido positivo**; o outro sentido é o **negativo**.

Com a origem **O** e o segmento unitário **OU** fica estabelecida uma escala sobre a reta.

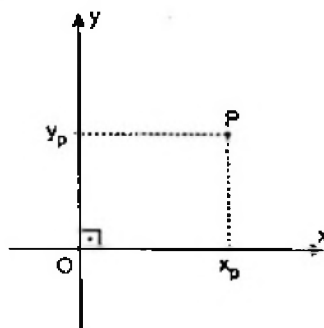
Sistema de Abscissas

Estabelecemos sobre um eixo um **sistema de abscissas** associando ao ponto **O** o número zero e ao ponto **U** o número 1: então, a cada ponto **P** do eixo corresponde um único número real x_P e, inversamente, a cada número real x_P corresponde um único ponto **P** sobre o eixo.

O número real x_P associado a P denomina-se abscissa de P; para indicarmos que o ponto P tem abscissa x_P, escrevemos:

$$P(x_P)$$

Na figura acima, temos: 0(0), U(1), A($\sqrt{2}$), B(–1).

Sistema Cartesiano Ortogonal

Consideremos dois eixos perpendiculares Ox e Oy, para os quais a interseção O seja a origem, e que tenham a mesma unidade de medida.

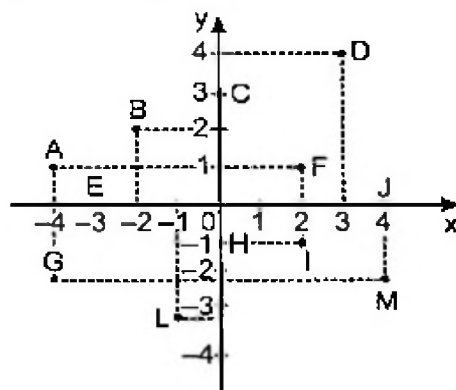
A um ponto qualquer P, do plano dos dois eixos; associamos *dois números reais* pelo processo seguinte:

Passamos por P retas perpendiculares aos eixos: uma delas encontra o eixo Ox no ponto de abscissa x_P, e a outra encontra o eixo Oy no ponto de abscissa y_P. Obtemos, assim, *um par ordenado de números reais*, $(x_P; y_P)$, associado ao ponto P. Os números x_P e y_P denominam-se **coordenadas de P**, x_P é a **abscissa de P** e y_P é a **ordenada de P**.

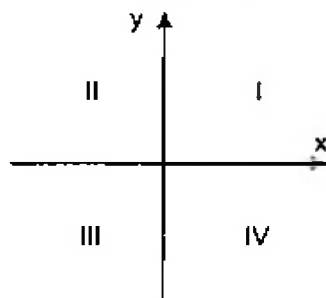
O sistema de coordenadas estabelecido por esse processo chama-se **sistema cartesiano ortogonal**.

Para indicarmos que o ponto P tem coordenadas $(x_P; y_P)$ escrevemos:

$$P(x_P; y_P)$$

A figura abaixo mostra alguns pontos do plano cartesiano, cada qual com suas coordenadas indicadas. Observe que os pontos pertencentes ao eixo Ox possuem ordenada y = 0, enquanto que os pontos pertencentes ao eixo Oy possuem abscissa x = 0. Na figura temos:

A (–4; 1)	G (–4; –2)
B (–2; 2)	H (0; –1)
C (0; 3)	I (2; –1)
D (3; 4)	J (4; 0)
E (–3; 0)	L (–1; –3)
F (2; 1)	M (4; –2)

Quadrantes

Os dois eixos do sistema cartesiano dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**, numeradas conforme se vê na figura abaixo. Convenciona-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes. É fácil ver que cada quadrante está relacionado com os sinais das coordenadas dos pontos. Por exemplo, se um ponto está no primeiro quadrante, suas coordenadas são ambas *positivas*; um ponto situado no quarto quadrante apresenta *abscissa positiva* e *ordenada negativa*.

5.2 – PAR ORDENADO

O Conceito de Par Ordenado

Admitiremos a noção de par ordenado como *conceito primitivo*.

Dados os objetos a e b podemos, com eles, formar um novo objeto, indicado por:

$$(a; b)$$

que se denomina **par ordenado**.

Diremos que no par ordenado (a; b), **a** é o *primeiro elemento*, ou *primeira coordenada*, ou *primeira projeção*; **b** é o *segundo elemento*, ou *segunda coordenada*, ou *segunda projeção*.

Observe que no conceito de par ordenado a ordem é essencial; assim o par (1; 3) é distinto do par (3; 1). No par (1; 3), 1 é o *primeiro elemento* e 3 é o *segundo elemento*, e, no par (3; 1), 3 é o *primeiro elemento* e 1 é o *segundo elemento*. O elemento é considerado com a sua ordem; modificando-se esta, estaremos modificando o par.

Igualdade de Pares Ordenados

Diremos que os pares ordenados (a; b) e (c; d) são iguais se e somente se são iguais os primeiros elementos dos pares e também são iguais os segundos elementos dos pares, isto é:

$$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow [a = c \text{ e } b = d]$$

Exemplos

a) $(1; 2) = (1; 2)$
b) $(x; y) = (-3; 2) \Leftrightarrow [x = -3 \text{ e } y = 2]$
c) Se $a = b$, então $(a; b) = (b; a)$

d) Se $a \neq b$ então $(a; b) \neq (b; a)$; observe que os conjuntos $\{a; b\}$ e $\{b; a\}$ *são iguais*, pois nos conjuntos a ordem dos elementos é irrelevante.

e) A um ponto P de um plano, sobre o qual fixamos um sistema cartesiano ortogonal, associamos um par ordenado de números reais $(x_P; y_P)$ cujos elementos são as coordenadas do ponto P. Abre-se, então, a possibilidade de representarmos graficamente um par ordenado $(x_P; y_P)$; essa representação é o ponto P do plano cuja abscissa é x_P e cuja ordenada é y_P.

Exercícios Resolvidos

5.1) Determine os números reais x e y, sabendo-se que:

a) $(x + y; 2) = (4; x - y)$

b) $(2x; y - 2x) = (3y; 3)$

Solução:

a) Da definição de igualdade entre pares ordenados temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema acima somamos e subtraímos, membro a membro, as duas equações, obtendo-se $x = 3$ e $y = 1$.

b) Da definição de igualdade entre pares ordenados temos:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ y - 2x = 3 \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas equações do sistema obtemos: $y = 3y + 3$ e daí: $y = \frac{-3}{2}$; por substituição obtemos: $x = \frac{-9}{4}$.

5.2) Os números a, b, c e d são inteiros. Para $bd \neq 0$ definem-se as operações de adição + e de multiplicação ·, entre pares ordenados, da seguinte forma:

$$(a; b) + (c; d) = (ad + bc; bd)$$
$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac; bd)$$

a) Determine $(2; 3) + (5; 4)$ e $(2; 3) \cdot (5; 4)$

b) Determine o intervalo x sabendo-se que: $(x + 2; 2) + (3; 2) = (x; 2) \cdot (1; 2)$

Solução:

a) $(2; 3) + (5; 4) = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 5; 3 \cdot 4) = (23; 12)$
$(2; 3) \cdot (5; 4) = (2 \cdot 5; 3 \cdot 4) = (10; 12)$

b) $(x + 2; 2) + (3; 2) = (x; 2) \cdot (1; 2) \Leftrightarrow (2x + 4 + 6; 4) = (x; 4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 10; 4) = (x; 4) \Leftrightarrow x = 2x + 10 \Leftrightarrow x = -10$

5.3) Podemos definir rigorosamente **par ordenado** como segue:

$$\boxed{(a;b) = \{\{a\};\{a;b\}\}}$$

Use essa definição e prove que: se $(a; b) = (c; d)$ então: $a = c$ e $b = d$.

Solução:

Por hipótese: (a; b) = (c; d), isto é: {{a}; {a; b}} = {{c}, {c; d}}.
Se a = b, o par (a; b) = {{a}} e então (c, d) = {{c}; {c; d}} = {{a}}; da igualdade dos conjuntos, que então devem ser constituidos pelos mesmos elementos, tem-se: a = b = c = d. Se a ≠ b, (a; b) e (c; d) possuem, respectivamente, como elementos os conjuntos {a} e {c}, que devem ser iguais: {a} = {c}, e então a = c. Também (a; b) e (c; d) possuem, respectivamente, como elementos os conjuntos {a; b} e {c; d}, que devem ser iguais: {a; b} = {c; d}; daí b = d (e *não* b = c, pois a = c e viria b = a, contra a hipótese). Então, a = c e b = d

Exercícios Propostos

5.4) Determine os números reais x e y sabendo-se que:

a) $\left(4x - y; \frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = (0;7)$ b) $\left(\frac{3x-1}{4}; 3x\right) = (y+2;\ 3+5y)$

5.5) Os números a, b, c e d são reais. Para os pares ordenados α = (a; b) e β = (c; d) definem-se as operações:
α + β = (a + c; b + d)
α · β = (ac – bd; ad + bc)
x · α = (xa; xb), para todo x, x ∈ ℝ
a) Determine (3; 1) + (–3; –1) e (a; b) · (1; 0)
b) Determine o *par ordenado* α sabendo-se que 3 · α + (–1; 2) = α · (1; 0)

5.6) Utilizando a definição do exercício 5.3 verifique que se (a; b) = (b; a) então a = b.

5.3 – PRODUTO CARTESIANO

Consideremos os conjuntos: A = {1; 2; 3} e B = {3; 5}.

Todos os pares ordenados (x; y) onde o *primeiro elemento*, x, é obtido no conjunto A e o *segundo elemento*, y, é obtido no conjunto B, são:

(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3) e (3; 5)

Podemos, então, formar um novo conjunto, cujos elementos são todos os pares ordenados (x; y) obtidos acima; esse conjunto denomina-se **produto cartesiano de A por B** e será indicado com A × B; assim:

A × B = {(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3), (3; 5)}

O símbolo A × B deve ser lido: "A cartesiano B".

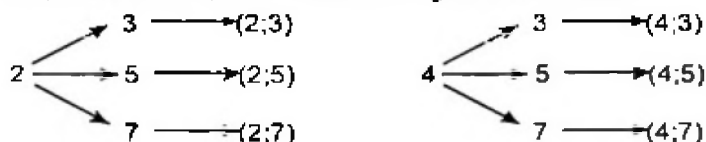
Definição

Chama-se produto cartesiano de um conjunto não-vazio A por um conjunto não-vazio B, ao conjunto de todos os pares ordenados (x; y) com primeiro elemento x em A e segundo elemento y em B; portanto:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ completa-se a definição com $A \times B = \varnothing$.

Exemplos

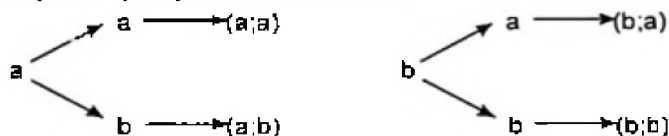
a) Se $A = \{2; 4\}$ e $B = \{3; 5; 7\}$ os elementos do produto cartesiano de A por B, $A \times B$, podem ser obtidos de uma forma sistemática, conforme o esquema abaixo, denominado "diagrama de árvore":

Então:

$A \times B$ {(2; 3), (2; 5), (2; 7), (4; 3), (4; 5), (4; 7)}

No esquema acima, observe que cada elemento de A gerou três pares ordenados; como A possui 2 elementos, o número de pares ordenados construídos é $2 \cdot 3 = 6$.

De um modo geral, se o conjunto A possui m elementos e o conjunto B possui n elementos, o conjunto $A \times B$ possui $m \cdot n$ elementos; isto é:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

b) Seja $A = \{a; b\}$ e formemos $A \times A$:

Então, $A \times A = \{(a; a), (a; b), (b; a), (b; b)\}$

Indica-se: $A \times A = A^2$

O subconjunto de $A \times A$, constituído pelos pares ordenados que têm as duas coordenadas iguais, denomina-se **diagonal** de $A \times A$; indica-se com Δ_A. No exemplo acima: $\Delta_A = \{(a; a); (b; b)\}$.

c) Consideremos $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{0; 1\}$.
Então:

$A \times B = \{(1; 0), (1; 1), (2; 0), (2; 1), (3; 0), (3; 1)\}$
$B \times A = \{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; 1), (1; 2), (1; 3)\}$

Este exemplo mostra que, em geral, $A \times B \neq B \times A$.

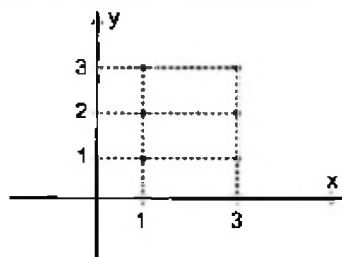
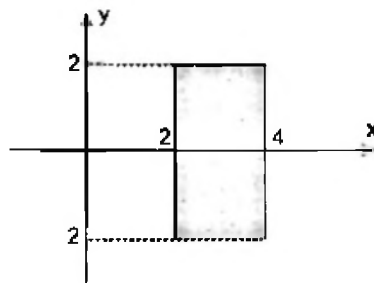
d) $\{1;3\} \times \varnothing = \varnothing \times \{1; 3\} = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$

Representação Gráfica do Produto Cartesiano

Se no plano fixarmos um sistema cartesiano ortogonal, sabemos que a todo par (x; y) de números reais corresponde o ponto P(x; y).

Sejam, então, A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Os elementos de $A \times B$ são pares ordenados de números reais e, a cada um deles, no plano, associa-se, então, um ponto. O conjunto de todos esses pontos representa graficamente $A \times B$; esse conjunto de pontos é o gráfico de $A \times B$.

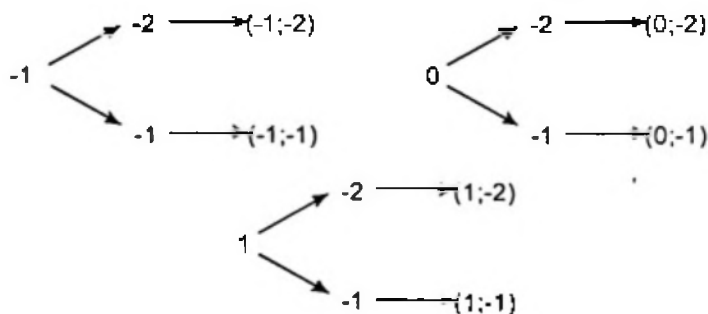
Exemplos

a) Se $A = \{1; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$ o *gráfico* de $A \times B$ é a totalidade dos pontos (x, y), com abscissa x em A e ordenada y em B:

b) Sejam os intervalos $A = [2; 4]$ e $B =]-2; 2]$.
O gráfico do conjunto $A \times B$ é o retângulo da figura excluídos os pontos do lado inferior. Note que o produto cartesiano de A por B é constituído por infinitos pares; o lado do retângulo que não está incluído no gráfico é indicado com uma linha interrompida:

Exercícios Resolvidos

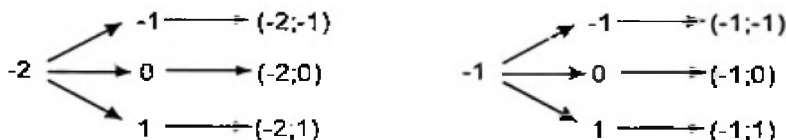
5.7) Se $A = \{-1; 0; 1\}$ e $B = \{-2; -1\}$, determine:

a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $(A \times B) \cap (B \times A)$
d) A^2
e) Δ_A

Solução:

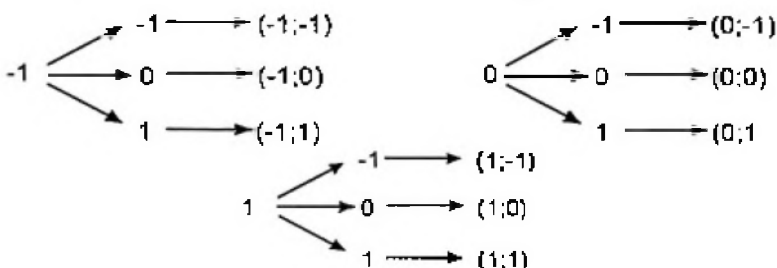
a) Para a construção de $A \times B$ utilizamo-nos do "diagrama de árvore":

Então:

$A \times B = \{(-1; -2), (-1; -1), (0; -2), (0; -1), (1; -2), (1; -1)\}$

b) Analogamente, utilizamo-nos do "diagrama de árvore":

Então $B \times A = \{(-2; -1), (-2; 0), (-2; 1), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1)\}$

c) Os pares ordenados comuns aos produtos $A \times B$, $B \times A$ são os elementos do conjunto $(A \times B) \cap (B \times A)$; então:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(-1; -1)\}$$

d) O conjunto $A^2 = A \times A$ obtém-se com o "diagrama de árvore":

Então: $A^2 = \{(-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (0; -1), (0; 0), (0; 1), (1; -1), (1; 0), (1; 1)\}$

e) Com a notação Δ_A indicamos a diagonal de $A \times A$; Δ_A é o subconjunto de A^2 cujos elementos são pares ordenados, onde as duas coordenadas são iguais; então:

$$\Delta_A = \{(-1; -1), (0; 0), (1; 1)\}$$

5.8) Se um conjunto A possui 3 elementos e um conjunto B possui 6 elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos:

a) B^2
b) A^2
c) $A \times B$
d) $B \times A$
e) Δ_B
f) $B^2 - \Delta_B$

Solução:

a) $n(B^2) = n(B) \cdot n(B) = 6 \cdot 6 = 36$

b) $n(A^2) = n(A) \cdot n(A) = 3 \cdot 3 = 9$

c) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 6 = 18$

d) $n(B \times A) = n(B) \cdot n(A) = 6 \cdot 3 = 18$

e) Δ_B é a diagonal de B^2; se em B há 6 elementos, é possível construirmos 6 pares nos quais as duas coordenadas são iguais; então: $n(\Delta_B) = 6$

f) B^2 possui 36 elementos e Δ_B possui 6 elementos; o conjunto $B^2 - \Delta_B$ é constituído pelos pares ordenados de B^2 que não pertencem à diagonal Δ_B. Então: $n(B^2) - \Delta_B = 36 - 6 = 30$.

5.9) O conjunto A^2 possui 9 elementos. Se: $(p; q) \in A^2$, $(r; q) \in A^2$ e p, q e r são distintos dois a dois, determine:

a) $n(A)$ b) A c) A^2

Solução:

a) $n(A^2) = n(A) \cdot n(A) = [n(A)]^2$; então $n(A^2) = 9$ e $n(A) = 3$

b) Se $(p; q) \in A \times A$ então $p \in A$ e $q \in A$
Se $(r; q) \in A \times A$ então $r \in A$
Daí, como A possui 3 elementos: $A = \{p; q; r\}$

c) Para a obtenção de A^2 utilizamos o "diagrama de árvore":

Então: $A = \{(p; p), (p; q), (p; r), (q; p), (q; q), (q; r), (r; p), (r; q), (r; r)\}$

5.10) Dê o gráfico dos seguintes produtos:

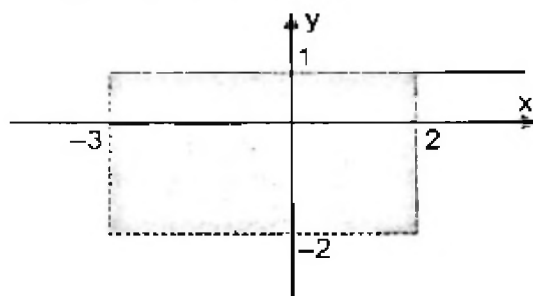
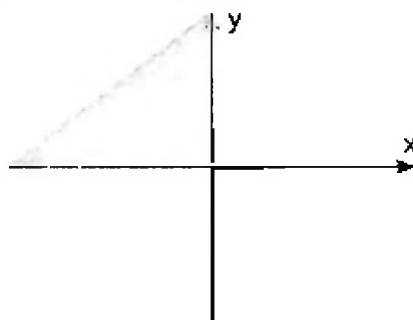
a) $\{-1; 0; 1\} \times \{-2; -1\}$

b) $]-3; 2] \times]-2; 1]$

c) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$

Solução:

a) Sobre o eixo das abscissas representamos o conjunto $\{-1; 0; 1\}$, marcando os pontos de abscissas -1; 0 e 1; por esses pontos traçamos retas paralelas ao eixo das ordenadas. Sobre o eixo das ordenadas, representamos o conjunto $\{-2; -1\}$, marcando sobre ele os pontos de abscissas -2 e -1; por esses pontos traçamos retas paralelas ao eixo das abscissas. Estas duas paralelas encontram aquelas três anteriores em 6 pontos, que constituem o gráfico do produto $\{-1; 0; 1\} \times \{-2; -1\}$.

b) Sobre o eixo das abscissas marcamos os pontos de abscissas −3 e 2 e por eles traçamos retas paralelas ao eixo das ordenadas. Sobre o eixo das ordenadas marcamos os pontos −2 e 1 e por eles traçamos retas paralelas ao eixo das abscissas. O subconjunto do plano limitado pelas quatro retas é o gráfico do produto $]-3; 2] \times]-2; 1]$, sendo que há dois lados do retângulo cujos pontos não estão incluídos no gráfico.

c) O gráfico do produto cartesiano $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ é constituido por todos os pontos de coordenadas $(x; y)$ para os quais $x \leq 0$ e $y \geq 0$; o conjunto desses pontos é a união do II quadrante com os semi-eixos, como parcialmente mostra a figura.

Exercícios Propostos

5.11) Se $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $A = \{3; 4; 5\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$ determine os seguintes conjuntos:

a) $A \times A$
b) $A \times B$
c) $B \times B$
d) $B \times A$
e) $A^2 \cap B^2$
f) $(A \times B) \cup (B \times A)$
g) $(U \times A) \cap (U \times B)$

5.12) Para os conjuntos $A = \{a; b\}$, $B = \{2; 3\}$ e $C = \{3; 4\}$, verifique se:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

5.13) Se A é um conjunto com n elementos e B é um conjunto com m elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos abaixo:

a) $A \times A$ b) B^2 c) $A \times B$ d) Δ_A e) $B^2 - \Delta_B$

5.14) Para os conjuntos A e B tem-se $n(A) = 3$ e $n(B) = 2$. Sabe-se que $A \cap B = \{2\}$, $(3; 4) \in A \times B$ e $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$. Determine A e B.

5.15) Se $A \times B = B \times A$, o que se pode concluir para os conjuntos A e B?

5.16) Desenhe o gráfico de cada um dos produtos abaixo:

a) $]-3; 1] \times]-1; 1[$
b) $]3; +\infty[\times]-\infty; -1[$
c) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$
d) $\{1\} \times [0, 6]$

5.4 – RELAÇÕES

Uma Escolha

Sentenças do tipo:

"João é *marido de* Maria."

"9 é *maior que* 7."

"Marcela é *irmã de* Luciana."

são comuns em nossa conversação do dia-a-dia.

Cada uma dessas sentenças (ou frases) envolve o que intuitivamente se conhece como uma relação: como Marcela e Luciana *se relacionem*? São irmãs!

E expressões do tipo:

"é marido de"

"é maior que"

"é irmã de"

"é divisível por"

"é membro de"

são classificadas como *conectivos que geram relações*; nós as chamaremos de *expressões conectivas*.

Observe que a palavra "relação" envolve uma **correspondência** ou uma associação entre dois objetos (pessoas, números, idéias, etc. . .); essa associação se faz a partir de uma certa propriedade possuída pelos objetos relacionados. No exemplo acima, Marcela está *relacionada*, associada, em correspondência com Luciana, a partir de uma propriedade que possuem: são *irmãs*.

Consideremos, agora, a sentença aberta:

$$x \text{ } \textit{é irmã de} \text{ } y$$

O par ordenado (Marcela; Luciana) satisfaz à sentença aberta, isto é, faz com que ela seja verdadeira, quando x é substituído por Marcela, e y, por Luciana. Entretanto, o par ordenado (João; Maria) não satisfaz à sentença aberta quando se faz a substituição de x por João e y por Maria. Analogamente, os pares ordenados (3; 2), (4; 1), (0; −1) satisfazem à sentença aberta:

$$x \text{ } \textit{é maior que} \text{ } y$$

enquanto os pares (3; 4), (−2; 1), (2; 6) não a satisfazem.

De um modo geral, consideremos sentenças abertas de duas variáveis:

$$x \underline{\qquad\qquad} y$$

onde o "espaço em branco" é representado por um traço, para ser preenchido por alguma *expressão conectiva*.

Podemos, então, eleger um universo de pares ordenados para testar se a sentença é verdadeira ou falsa; assim, dois conjuntos são formados: o conjunto daqueles pares que satisfazem à sentença e o conjunto daqueles pares que não a satisfazem.

Podemos, agora, colocar uma questão de escolha: relação é a *expressão conectiva*, ou o conjunto de pares ordenados que satisfazem à sentença aberta originada por essa expressão?

Acreditamos que o conceito de relação é mais preciso se for definido como um conjunto de pares ordenados.

Então,

Definição

Sejam os conjuntos A e B. Uma relação $\Re$, de A em B, é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplos

Sejam $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 2\}$; os subconjuntos de $A \times B$:

$\Re_1 = \{(1; 1), (1; 2), (3; 2)\}$
$\Re_2 = \{(2; 2), (3; 2)\}$
$\Re_3 = \{(2; 1)\}$
$\Re_4 = \varnothing$
$\Re_5 = A \times B$

são *relações de A em B*.

Seja $\Re$ uma relação de A em B. Para indicarmos que o elemento a *está relacionado* com o elemento b através de $\Re$, isto é, para indicarmos que $(a; b) \in \Re$, usaremos a notação:

$$a \, \Re \, b$$

que se lê "a R b" ou "a está na relação $\Re$ com b".

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {a; b; c}, B = {1; 2; 3} e a relação de A em B:

$$\Re = \{(a; 1), (b; 1), (b; 3)\}$$

Então:

$(a; 1) \in \Re$ e daí $a \Re_1$

$(b; 1) \in \Re$ e daí $a \Re_2$

$(b; 3) \in \Re$ e daí $a \Re_3$

Domínio e Conjunto-imagem de uma Relação

Seja $\Re$ uma relação de A em B.

O conjunto $D(\Re)$ constituído por todos elementos x de A para os quais existe y em B tal que $(x; y) \in \Re$ é denominado **domínio de $\Re$**.

O conjunto $I(\Re)$ constituído por todos elementos y de B para os quais existe x em A tal que $(x; y) \in \Re$ é denominado **conjunto-imagem de $\Re$**.

Exemplo

Na relação $\Re$ do exemplo anterior:

$$D(\Re) = \{a; b\}$$

$$I(\Re) = \{1; 3\}$$

ercícios Resolvidos

5.17) Sejam os conjuntos A = {−1; 0; 2}, B = {x; y; z} e a relação $\Re$ de A em B:

$$\Re = \{(-1; x), (0; y), (2; z)\}$$

Dê o valor *verdadeiro* (V) ou *falso* (F):

a) $(-1; x) \in \Re$ ( )

b) $(-1; y) \in \Re$ ( )

c) $0 \, \Re \, y$ ( )

d) $0 \, \Re \, z$ ( )

Solução:

a) V, pois $(-1; x)$ é um elemento de $\Re$

b) F, pois $(-1; y)$ não é elemento de $\Re$

c) V, pois $(0; y) \in \Re$

d) F, pois $(0; z) \notin \Re$

5.18) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 4}, B = {−1; 0; 3} e a relação $\Re$, de A em B:

$$\Re = \{(1; -1), (1; 0), (4; 0)\}$$

Determine: $D(\Re)$ e $I(\Re)$

Solução:

O domínio de $\Re$, $D(\Re)$, é constituído pelas *primeiras coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$D(\Re) = \{1; 4\}$$

O conjunto-imagem de $\Re$, $I(\Re)$, é constituído pelas *segundas coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$I(\Re) = \{-1; 0\}$$

5.19) Um conjunto A possui 2 elementos e um conjunto B possui 3 elementos. Quantas são as relações de A em B?

Solução:

Se $n(A) = 2$ e $n(B) = 3$, então $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6$

Qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ é uma relação de A em B. Se o conjunto $A \times B$ possui 6 elementos, o número de seus subconjuntos é $2^6 = 64$.
Então, há 64 relações de A em B.

Exercícios Propostos

5.20) Sejam os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 2\}$ e a relação $\Re$ de A em B.

$$\Re = \{(1; -1), (1; 2)\}$$

Dê o valor *verdadeiro* (V) ou *falso* (F):

a) $(1; -1) \in \Re$ ( )
b) $(1; 2) \in \Re$ ( )
c) $1 \Re 2$ ( )
d) $2 \Re 2$ ( )

5.21) Sejam os conjuntos $A = \{x; a; b\}$, $B = \{4; 7; 10\}$ e a relação $\Re$ de A em B.

$$\Re = \{(x; 4), (x; 7), (x; 10)\}$$

Determine: $D(\Re)$ e $I(\Re)$

5.22) Um conjunto A possui m elementos e um conjunto B possui n elementos. Quantas são as relações de A em B?

5.5 – PROCESSOS PARA SE REPRESENTAR UMA RELAÇÃO

1º) Podemos representar uma relação enumerando os pares ordenados que a constituem.

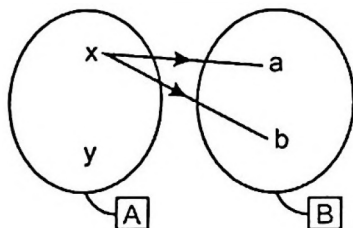
Já utilizamos essa forma de representação em alguns exemplos vistos até aqui.

Exemplo

Considere os conjuntos $A = \{x; y\}$ e $B = \{a; b\}$. A relação de A em B:

$$\Re = \{(x; a), (x; b)\}$$

está representada por enumeração de seus elementos, os pares ordenados: (x; a) e (x, b)

2°) Podemos representar uma relação através de um *diagrama de flechas*. Assim, a relação $\mathfrak{R}$ do exemplo anterior pode ser representada com:

3°) Podemos representar uma relação descrevendo o conjunto dos pares ordenados que a constituem com auxílio da *expressão conectiva* que "liga" os elementos desses pares.

Exemplos

a) Seja o conjunto A = {1; 2; 3} e a relação $\mathfrak{R}$, de A em A, constituída pelos pares (3; 1), (3; 2) e (2; 1). Note que esses pares satisfazem à sentença aberta:

x *é maior que* y

com $(x; y) \in A \times A$.
Então, podemos representar $\mathfrak{R}$ com:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A \times A \mid x \textit{ é maior que } y\}$$

Os pares que pertencem a $\mathfrak{R}$ são todos aqueles para os quais a sentença aberta x *é maior que* y é verdadeira para $x \in A$ e $y \in A$.

No exemplo, a expressão conectiva *é maior que* pode ser substituída pelo símbolo >. Então, a equivalência entre as sentenças: $(x; y) \in \mathfrak{R}$, $x\,\mathfrak{R}\,y$ e $x > y$ é evidente. Assim:

$$\mathfrak{R} = \{x; y) \in A \times A \mid x \textit{ é maior que } y\}$$
$$\mathfrak{R} = \{x; y) \in A \times A \mid x > y\}$$

b) A partir da expressão conectiva *é divisor de* e do conjunto A = {1; 2; 4}, podemos construir a relação $\mathfrak{R}$, de A em A:

$$\mathfrak{R} = \{x; y) \in A \times A \mid x \textit{ é divisor de } y\}$$

Observe que:

1 *é divisor de* 1
1 *é divisor de* 2
1 *é divisor de* 4
2 *é divisor de* 4

Todos os pares (x; y) que satisfazem à sentença x *é divisor de* y, com x em A e y em A, são (1; 1), (1; 2), (1; 4) e (2; 4). Note que, por exemplo,

(2; 1) $\notin \Re$, pois a sentença 2 *é divisor de* 1 é falsa. Então, se quisermos $\Re$, enumerando os seus elementos teremos:

$$\Re = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 4)\}$$

4º) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

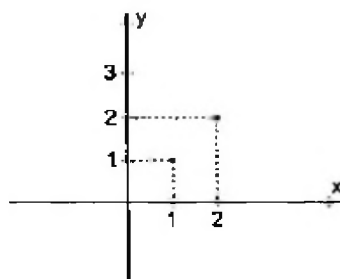
Uma relação $\Re$, de A em B, pode ser representada graficamente, como já fizemos com o produto cartesiano de dois conjuntos.
No plano, construímos um sistema xOy de eixos ortogonais e, a cada par (x; y) de $\Re$, associamos o ponto de abscissa x e de ordenada y; o conjunto de todos os pontos assim obtidos é o **gráfico de** $\Re$.

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {1; 2}, B = {1; 2; 3} e a relação $\Re$, de A em B:

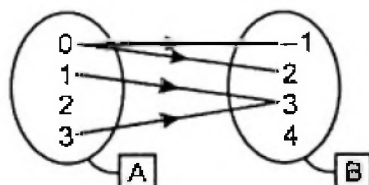
$$\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

Os pares (1; 1) e (2; 2) satisfazem à sentença aberta x = y e, portanto, são os elementos de $\Re$.

O gráfico de $\Re$ é constituído por dois pontos, cujas coordenadas são (1; 1) e (2; 2):

Resumindo, note que uma relação de A em B é um conjunto de pares ordenados (x; y), com x em A e y em B.

A descrição desse conjunto de pares pode ser feita através de procedimentos diferentes: uma tabela, um gráfico, um "diagrama de flechas", uma descrição com sentenças abertas construídas a partir de expressões conectivas que "ligam" os elementos dos pares.

Exercícios Resolvidos

5.23) Considere a relação $\Re$, de A em B, definida pelo "diagrama de flechas" abaixo:

a) Represente $\Re$ enumerando os pares ordenados que a constituem.
b) Determine D($\Re$) e I($\Re$).

c) Construa o gráfico de $\Re$.

Solução:

a) Temos $0 \Re (-1)$, $0 \Re 2$, $1 \Re 3$ e $3 \Re 3$; e, portanto:

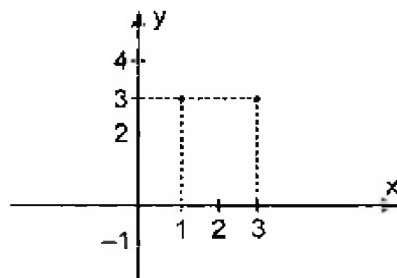
$$\Re = \{(0; -1), (0; 2), (1; 3), (3; 3)\}$$

b) O domínio de $\Re$, $D(\Re)$, é constituído pelas *primeiras coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$D(\Re) = \{0; 1; 3\}$$

O conjunto-imagem de $\Re$, $I(\Re)$, é constituído pelas *segundas coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$I(\Re) = \{-1; 2; 3\}$$

c) O gráfico de $\Re$ é o conjunto constituído pelos pontos de coordenadas $(0; -1)$, $(0; 2)$, $(1; 3)$ e $(3; 3)$:

5.24) Sejam os conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ e a relação $\Re$, de A em B, definida por:

$$\Re = \{(x; y) \in A \times B \mid x \text{ é o dobro de } y\}$$

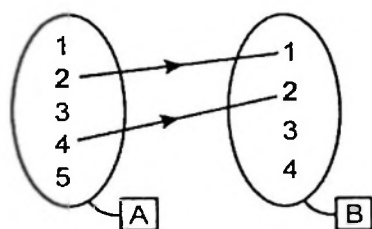
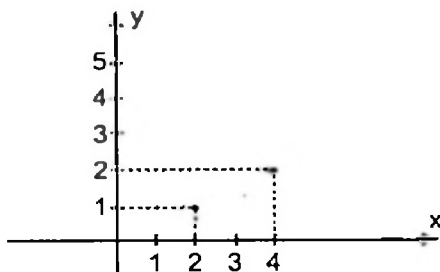
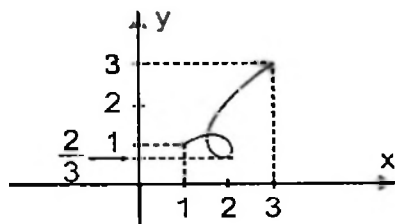
a) Dê $\Re$, enumerando os seus elementos.
b) Determine $D(\Re)$ e $I(\Re)$.
c) Dê $\Re$, através de um "diagrama de flechas".
d) Construa o gráfico de $\Re$.

Solução:

a) Todos os pares $(x; y)$, com x em A e y em B, para os quais a sentença aberta: x *é o dobro de* y, $x = 2y$ é verdadeira são: $(2; 1)$ e $(4; 2)$; então:

$$\Re = \{(2; 1), (4; 2)\}$$

b) $D(\Re) = \{2; 4\}$ e $I(\Re) = \{1; 2\}$

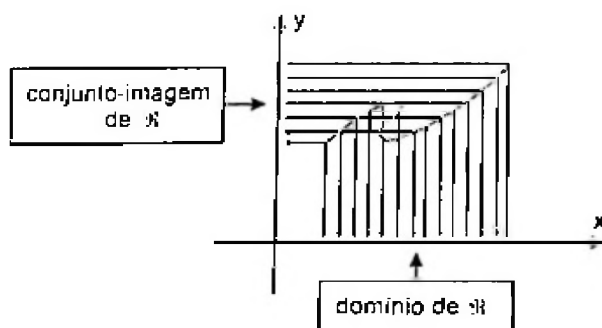
c)

d) O gráfico de $\Re$ é constituído por dois pontos:

5.25) Seja a relação $\Re$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pelo gráfico:

Determine D($\Re$) e I($\Re$).

Solução:

Observe que os pontos (x; y) do gráfico de $\Re$ são tais que: $1 \le x \le 3$ e $\frac{2}{3} \le y \le 3$. Em consequência:

$$D(\Re) = [1; 3]$$

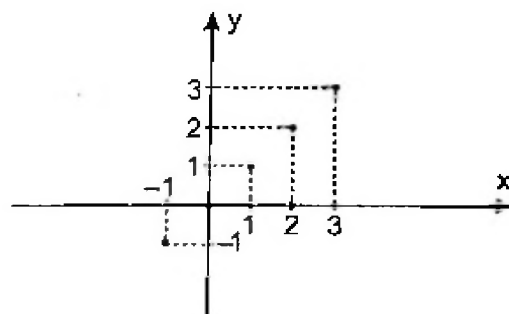
$$I(\Re) = \left[\frac{2}{3}; 3\right]$$

Uma maneira prática para se obter D($\Re$) e I($\Re$) a partir do gráfico G, de $\Re$, é a seguinte: projeta-se G sobre Ox, na direção Oy: obtém-se D($\Re$); projeta-se G sobre Oy, na direção Ox: obtém-se I($\Re$). Veja a figura abaixo:

Exercícios Propostos

5.26) Sejam o conjunto E = {1; 2; 3; 4; 5; 6} e a relação $\mathfrak{R}$, de E em E, definida por:

$$\mathfrak{R} = \left\{(x, y) \in E^2 \mid y = \frac{x}{2}\right\}$$

a) Dê a relação $\mathfrak{R}$, enumerando os seus elementos.
b) Dê a relação $\mathfrak{R}$, através de um "diagrama de flechas".
c) Gráfico de $\mathfrak{R}$.

5.27) Considere a relação $\mathfrak{R}$, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida pelo gráfico:

a) Dê $\mathfrak{R}$, enumerando os seus elementos.
b) Determine D($\mathfrak{R}$) e I($\mathfrak{R}$).
c) Dê $\mathfrak{R}$, através de uma sentença aberta construída a partir de uma *expressão conectiva* que "liga" os elementos que constituem seus pares.

5.28) Desenhe o gráfico da relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$$

5.29) Seja a relação $\mathfrak{R}$, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

a) Dê a relação $\Re$ por enumeração de seus elementos.
b) Determine $D(\Re)$ e $I(\Re)$.
c) Gráfico de $\Re$.

5.30) Considere o conjunto A = {{1; 2; 3}, {1; 2}, 1, 2, 3} e as relações de A em A definidas por:

$$\Re_1 = \{(x; y) \in A^2 \mid x \in y\}$$

$$\Re_2 = \{(x; y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

Determine $\Re_1$ e $\Re_2$ por enumeração de seus elementos.

5.6 – ALGUNS TIPOS DE RELAÇÕES

Propriedades das Relações

Se $\Re$ é uma relação de A em A, diz-se simplesmente que $\Re$ é uma **relação sobre A**.

Há algumas propriedades bastante significativas para uma relação $\Re$ **sobre** A:

1ª) $\Re$ **diz-se reflexiva se e somente se para todo x em A** tem-se:

$$(x; x) \in \Re$$

Observe que todo elemento x de A está relacionado consigo mesmo: $x \Re x$, para todo x em A.

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é reflexiva se existir um elemento x em A tal que $(x; x) \notin \Re$.

Exemplos

a) Se A = {1; 2; 3; 4}, a relação de *igualdade* sobre A, definida por:

$$\Re = \{(x; y) \in A^2 \mid x = y\}$$

é *reflexiva*.
Note que $\Re$ = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)}

b) Uma relação $\Re$, sobre A, *reflexiva*, pode possuir como elementos outros pares além daqueles da forma (x; x).
Seja A = {1; 2; 3; 4}; a relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 3), (2; 3)\}$$

é *reflexiva*.
Observe que os seus elementos são todos os pares da forma (x; x), $x \in A$, e outros dois pares: (1; 3) e (2; 3)

c) Se A = {1; 2; 3; 4}, a relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 1), (2; 2), (4; 4), (1; 3)\}$$

não é *reflexiva* pois (3; 3) $\Re$.
Note que se $\Re$ é uma relação sobre A, *reflexiva*, então:

$$\Delta_A \subset \Re$$

onde Δ_A é a *diagonal* de $A \times A$

2ª) $\Re$ diz-se **simétrica** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ então $(b; a) \in \Re$.

Observe que então numa relação simétrica, se a está relacionado com b isto é, $a \Re b$, então b está relacionado com a, isto é, $b \Re a$:

$$a \Re b \Rightarrow b \Re a$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é simétrica se existirem a e b em A, $a \neq b$, tais que $(a, b) \in \Re$ e $(b, a) \notin \Re$.

Exemplos

a) Seja $A = \{1; 2; 3\}$. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1)\}$$

é *simétrica*, pois sempre que ocorre $a \Re b$ também ocorre $b \Re a$.

b) Seja $A = \{1; 2; 3, 4\}$. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 3), (4; 2), (2; 4), (2; 3), (3; 1)\}$$

não é *simétrica*, pois $(2; 3) \in \Re$ e $(3; 2) \notin \Re$.

3ª) $\Re$ diz-se **transitiva** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ e $(b; c) \in \Re$, então $(a, c) \in \Re$.

Observe que então, se a está relacionado com b, isto é, $a \Re b$, e b está relacionado com c, isto é, $b \Re c$, então a está relacionado com c, isto é, $a \Re c$:

$$(a \Re b \text{ e } b \Re c) \Rightarrow a \Re c$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é transitiva se existirem a, b e c em A tais que: $(a, b) \in \Re$ e $(b; c) \in \Re$, mas $(a; c) \notin \Re$.

Exemplos

a) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação sobre $\mathbb{R}$:

$$\Re = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$$

é *transitiva*, pois se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

b) Seja $A = \{a; b; c\}$. A relação sobre A:

$$\Re = \{(a; b), (c; b), (b; a), (a; c)\}$$

não é *transitiva*, pois $(c, b) \in \Re$ e $(b; a) \in \Re$, mas $(c; a) \notin \Re$.

4ª) $\Re$ diz-se **anti-simétrica** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ e $(b; a) \in \Re$ então $a = b$.

Observe que então, se a está relacionado com b, isto é $a \Re b$, e b está relacionado com a, isto é, $b \Re a$, então a é igual a b:

$$(a \Re b \text{ e } b \Re a) \Rightarrow a = b$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é anti-simétrica se existirem a e b em A, $a \neq b$, tais que $(a; b) \in \Re$ e também $(b; a) \in \Re$.

Exemplos

a) Seja A um conjunto cujos elementos são conjuntos. A relação sobre A:

$$\Re = \{(x, y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

é *anti-simétrica*, pois $(x \subset y \text{ e } y \subset x) \Rightarrow x = y$

b) Seja A = {1; 2; 3; 4}. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 3), (4; 2), (4; 4), (2; 4)\}$$

não é *anti-simétrica*, pois $(4; 2) \in \Re$ e também $(2; 4) \in \Re$.

Relação de Equivalência

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A chama-se **relação de equivalência** se e somente se:

1ª) $\Re$ é reflexiva
2ª) $\Re$ é simétrica
3ª) $\Re$ é transitiva

Exemplos

a) Seja A o conjunto de todos os triângulos do plano. A relação sobre A

$$\Re = \{(x; y) \in A^2 \mid x \textit{ é semelhante a } y\}$$

é uma relação de equivalência, pois satisfaz às três condições da definição.

b) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A *relação de igualdade* sobre $\mathbb{R}$:

$$\Re = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

é uma relação de equivalência, pois:

1ª) para todo a em $\mathbb{R}$: a = a, isto é, $a \Re a$ (reflexiva)

2ª) se a = b então b = a, isto é, $a \Re b \Rightarrow b \Re a$ (simétrica)

3ª) se a = b e b = c então a = c, isto é, $(a \Re b \text{ e } b \Re c) \Rightarrow a \Re c$ (transitiva)

Relação de Ordem

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A chama-se **relação de ordem** se e somente se:

1ª) $\Re$ é reflexiva
2ª) $\Re$ é anti-simétrica
3ª) $\Re$ é transitiva

Exemplos

a) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação *menor ou igual* sobre $\mathbb{R}$:

$$\Re = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

é uma relação de ordem, pois:

1ª) para todo x em $\mathbb{R}$: $x \leq x$, isto é, $x \Re x$ (reflexiva)

2ª) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$, isto é $(x \ \Re \ y$ e $y \ \Re \ x) \Rightarrow x = y$ (anti-simétrica)
3ª) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$, isto é $(x \ \Re \ y$ e $y \ \Re \ z) \Rightarrow x \ \Re \ z$ (transitiva)

b) Seja A um conjunto cujos elementos são conjuntos. A relação sobre A:

$$\Re = \{(x; y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

é uma relação de ordem, pois:

1ª) para todo x em A: $x \subset x$, isto é, $x \ \Re \ x$ (reflexiva)
2ª) se $x \subset y$ e $y \subset x$ então $x = y$, isto é $(x \ \Re \ y$ e $y \ \Re \ x) \Rightarrow x = y$ (anti-simétrica)
3ª) se $x \subset y$ e $y \subset z$ então $x \subset z$, isto é $(x \ \Re \ y$ e $y \ \Re \ z) \Rightarrow x \ \Re \ z$ (transitiva)

Relação Inversa

Considere os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4\}$ e a relação de A em B:

$$\Re = \{(1; 2), (1; 4), (2; 4), (3; 4)\}$$

Observe que $D(\Re) = \{1; 2; 3\}$ e $I(\Re) = \{2; 4\}$.

Se as coordenadas de todos os pares ordenados de $\Re$ são trocadas, uma pela outra, obtém-se o conjunto:

$$\{(2; 1), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$$

Esse conjunto é representado por $\Re^{-1}$ e denomina-se **relação inversa de** $\Re$.
Observe que $D(\Re^{-1}) = I(\Re) = \{2; 4\}$ e $I(\Re^{-1}) = D(\Re) = \{1; 2; 3\}$.

Note também que se $\Re$ é uma relação de A em B então $\Re^{-1}$ uma relação de B em A e que se $(a; b) \in \Re$, então $(b; a) \in \Re^{-1}$.

No exemplo abaixo podemos escrever:

$$\Re = \{(x; y) \in A \times B \mid x < y\}$$

e também:

$$\Re^{-1} = \{(x; y) \in B \times A \mid y < x\}$$

Então, a sentença $y < x$ que define $\Re^{-1}$ obtém-se da sentença $x < y$ que define $\Re$, trocando-se nesta as *variáveis* x e y, uma pela outra.

Resumindo, para toda relação $\Re$, de A em B, existe uma relação $\Re^{-1}$, **inversa** de $\Re$, de B em A, definida por:

$$\boxed{\Re^{-1} = \{(a; b) \mid (b; a) \in \Re\}}$$

Exercícios Resolvidos

5.31) Sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a relação:

$$\Re = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

é uma relação de equivalência?

Solução:

1ª) para todo x real tem-se $x^2 = x^2$, isto é, $x \ \Re \ x$: $\Re$ é reflexiva

2ª) se $x^2 = y^2$ então $y^2 = x^2$, isto é, $x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow y \,\mathfrak{R}\, x$: $\mathfrak{R}$ é simétrica

3ª) se $x^2 = y^2$ e $y^2 = z^2$ então $x^2 = z^2$, isto é, $(x \,\mathfrak{R}\, y$ e $y \,\mathfrak{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathfrak{R}\, z$: $\mathfrak{R}$ é transitiva.

Logo, $\mathfrak{R}$ é relação de equivalência.

5.32) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. A relação sobre $\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \textit{ é divisor de } y\}$$

é uma relação de ordem?

Solução:

1ª) para todo x natural: x *é divisor de* x, isto é $x \,\mathfrak{R}\, x$: $\mathfrak{R}$ é reflexiva

2ª) se x *é divisor de* y e se y *é divisor de* x, então x = y, isto é, $(x \,\mathfrak{R}\, y$ e $y \,\mathfrak{R}\, x) \Rightarrow x = y$: $\mathfrak{R}$ é anti-simétrica

3ª) se x *é divisor de* y e y *é divisor de* z então x *é divisor de* z, isto é, $(x \,\mathfrak{R}\, y$ e $y \,\mathfrak{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathfrak{R}\, z$: $\mathfrak{R}$ é transitiva.

Logo, $\mathfrak{R}$ é relação de ordem.

5.33) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x + y = 10\}$$

Determine:

a) $D(\mathfrak{R})$ b) $I(\mathfrak{R})$ c) $\mathfrak{R}^{-1}$

Solução:

Note que os únicos pares, com coordenadas em $\mathbb{N}$, que satisfazem à sentença $2x + y = 10$ são: (1; 8), (2; 6), (3; 4) e (4; 2). Então:

$$\mathfrak{R} = \{(1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2)\}$$

a) $D(\mathfrak{R}) = \{1; 2; 3; 4\}$

b) $I(\mathfrak{R}) = \{8; 6; 4; 2\}$

c) $\mathfrak{R}^{-1} = \{(8; 1), (6; 2), (4; 3), (2; 4)\}$ ou utilizando-nos do raciocínio do exemplo dado ao definirmos relação inversa:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2y + x = 10\}$$

Note que nessa representação a sentença que define $\mathfrak{R}^{-1}$ foi obtida da sentença que define $\mathfrak{R}$, trocando-se nesta as *variáveis* x e y, uma pela outra.

5.34) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A. Se $\mathfrak{R}$ é transitiva, prove que $\mathfrak{R}^{-1}$ é transitiva.

Solução:

Sejam os pares (a; b) e (b; c) de $\mathfrak{R}^{-1}$; mostremos que $(a; c) \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Se $(a; b) \in \mathfrak{R}^{-1}$ então $(b; a) \in \mathfrak{R}$ \
Se $(b; c) \in \mathfrak{R}^{-1}$ então $(c; b) \in \mathfrak{R}$ } $\mathfrak{R}$ é transitiva : então $(c; a) \in \mathfrak{R}$

Se $(c; a) \in \mathfrak{R}$ então $(a; c) \in \mathfrak{R}^{-1}$

5.35) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de U em U. A relação $\mathfrak{R}'$, de U em U, definida por:

$$\mathfrak{R}' = C^{\mathfrak{R}}_{U \times U}$$

denomina-se relação complementar de $\mathfrak{R}$.

Sejam U = {1; 2, 3} e a relação de U em U:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in U^2 \mid x = y\}$$

Determine $\mathfrak{R}'$.

Solução:

U x U = {(1, 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2, 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)}
$\mathfrak{R}$ = {(1; 1), (2; 2), (3, 3)}
Observe que os pares ordenados que pertencem a $\mathfrak{R}'$ são aqueles de U × U que não pertencem a $\mathfrak{R}$; então:

$$\mathfrak{R}' = \{(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)\}$$

.xercícios Propostos

5.36) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1$ = {(1; 2), (3; 2), (2; 2), (2; 3)}
$\mathfrak{R}_2$ = {(1; 2), (2, 3), (1; 3)}
$\mathfrak{R}_3$ = {(1; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3)}
$\mathfrak{R}_4$ = {(1, 2)}
$\mathfrak{R}_5$ = E × E
Diga quais das relações acima são *reflexivas*.

5.37) Seja E = {1; 2, 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1$ = {(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (2; 3)}
$\mathfrak{R}_2$ = {(1; 1)}
$\mathfrak{R}_3$ = {(1; 2)}
$\mathfrak{R}_4$ = {(1; 1), (3; 2), (2; 3)}
$\mathfrak{R}_5$ = E × E
Diga quais das relações acima são *simétricas*.

5.38) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1$ = {(1; 2), (2; 2)}
$\mathfrak{R}_2$ = {(1; 2), (2; 3), (1; 3), (2; 1), (1; 1)}
$\mathfrak{R}_3$ = {(1; 2)}
$\mathfrak{R}_4$ = {(1; 1)}
$\mathfrak{R}_5$ = E × E
Diga quais das relações acima são *transitivas*.

5.39) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1$ = {(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (2; 3)}
$\mathfrak{R}_2$ = {(1; 1)}
$\mathfrak{R}_3$ = {(1; 2)}
$\mathfrak{R}_4$ = {(1; 1), (2; 3), (3; 2)}
$\mathfrak{R}_5$ = E × E
Diga quais das relações são *anti-simétricas*.

5.40) Seja E o conjunto de todas as retas do plano. A relação sobre E definida pela sentença "*x é paralela a y*" é uma relação de equivalência?

5.41) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$$

é uma relação de ordem?

5.42) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y \text{ \textit{é divisível por} } 3\}$$

$\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência?

5.43) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ definida pela sentença "x *é múltiplo de y*". $\mathfrak{R}$ uma relação de ordem?

5.44) Seja A = {–2; –1; 0; 1; 2; 3}. Para cada uma das relações $\mathfrak{R}$, sobre A, definidas abaixo determine:

1º) $\mathfrak{R}$ por enumeração de seus pares ordenados
2º) $D(\mathfrak{R})$ e $I(\mathfrak{R})$
3º) $\mathfrak{R}^{-1}$ por enumeração de seus pares
$\mathfrak{R}^{-1}$ através de uma sentença que "liga" as coordenadas de seus pares

a) $\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in A^2 \mid y = 2x\}$
b) $\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in A^2 \mid x - y = 1\}$
c) $\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in A^2 \mid xy = 2\}$

5.45) $\mathfrak{R}$ é uma relação de A em A;

a) Se $\mathfrak{R} = A \times A$, determine $\mathbb{R}^{-1}$ e $\mathbb{R}'$.

b) Se $\mathfrak{R} = \varnothing$, determine $\mathbb{R}^{-1}$ e $\mathbb{R}'$.

c) $(\mathfrak{R}^{-1})^{-1}$ é igual a.......

5.46) Seja U = {1; 2; 3}. Considere as relações sobre U:

$\mathfrak{R}_1 = \{(x;\ y) \in U^2 \mid x \neq y\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(x;\ y) \in U^2 \mid x + y \neq 3\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(x;\ y) \in U^2 \mid x + y \geq 3\}$

Mostre que:

a) $\mathfrak{R}_1 \cup (\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}_3) = (\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) \cap (\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_3)$
b) $\mathfrak{R}_1^{-1} \cap (\mathfrak{R}_2^{-1} \cup \mathfrak{R}_3^{-1}) = (\mathfrak{R}_1^{-1} \cap \mathfrak{R}_2^{-1}) \cup (\mathfrak{R}_1^{-1} \cap \mathfrak{R}_3^{-1})$
c) $(\mathfrak{R}'_2)' = \mathfrak{R}_2$

5.47) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre U, onde U = {1; 2; 3; 4}. Suponhamos que (1; 2) $\in \mathfrak{R}$; então (2; 1) $\in \mathfrak{R}^{-1}$. Sejam A o ponto do plano cartesiano que corresponde ao par (1; 2) e B o ponto correspondente ao par (2; 1).

a) O segmento $\overline{AB}$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares são perpendiculares?

b) Se o segmento $\overline{AB}$ corta a bissetriz em C, o que se pode dizer dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

c) Generalize: a partir do gráfico de $\mathfrak{R}$, como se obtém o gráfico de $\mathfrak{R}^{-1}$?

5.48) $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ são relações sobre A. Se $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ são simétricas, mostre que $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ é *simétrica*.

. UNÇÃO

O Conceito de Função

Por seu caráter unificador, o conceito de **função** é fundamental; praticamente, toda matemática constrói-se em torno dele.

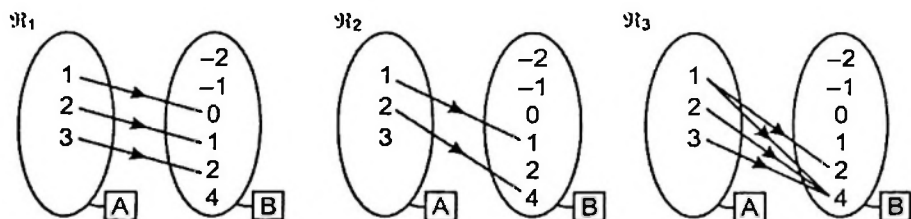
Então, dada a sua importância, a sequência do nosso trabalho será voltada quase integralmente para o estudo das funções elementares.

Intuitivamente, função descreve uma *correspondência* entre os elementos de dois conjuntos: de uma forma mais precisa, *função é um tipo especial de relação*.

Vejamos alguns exemplos.

Sejam os conjuntos: A = {1; 2; 3} e B = {–2; –1; 0; 1; 2; 4} e as relações de A em B:

$\mathfrak{R}_1 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x^2\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(x; y) \in A \times B \mid y > x\}$

Os "diagramas de flechas" que representam essas relações são:

A relação $\mathfrak{R}_1$ apresenta uma particularidade: a **todo elemento x** de A "corresponde" **um e um só** elemento y de B; a relação $\mathfrak{R}_1$ denomina-se **função de A em B.**

A relação $\mathfrak{R}_2$ não é função de A em B: ao elemento 3 de A não se associa elemento algum em B.

A relação $\mathfrak{R}_3$ não é função de A em B: ao elemento 1 de A associam-se dois elementos em B.

Note que, para que uma relação de A em B seja uma função de A em B, a **todo** elemento x de A se deve "associar" **um e um só** elemento em B.

Definição

> Sejam os conjuntos A e B diferentes do conjunto vazio, e seja f uma relação de A em B. Diz-se que f é uma função de A em B se, e somente se, para todo x em A existir em correspondência um e um só y em B tal que: $(x; y) \in f$.

Note que uma relação f de A em B é uma função de A em B quando e somente quando cada x de A *aparece como primeira coordenada em um e somente em um par ordenado de f*.

Nomenclatura

Seja f uma função de A em B.

Se x é um elemento qualquer de A, então o único y de B associado a x denomina-se **imagem de x pela função f** e será indicado com a notação f(x), (lê-se: "f de x"):

$$y = f(x)$$

O conjunto A denomina-se **domínio de f**, e pode ser indicado com a notação D(f), como já fizemos com as relações.

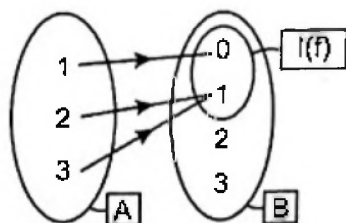
O conjunto B denomina-se **contradomínio de f**, e pode ser indicado com a notação CD(f).

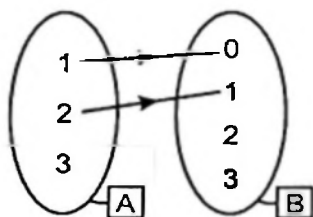
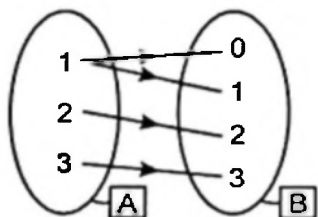
O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A denomina-se **conjunto-imagem de f** e pode ser indicado com a notação I(f), como já fizemos com as relações:

$$I(f) = \{y \in B \mid \exists x, x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

Observe que $I(f) \subset CD(f)$.

Exemplos

a) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {0; 1; 2; 3}. A relação f, de A em B, definida pelo diagrama de flechas abaixo, é uma função de A em B.

D(f) = {1; 2; 3}
CD(f) = {0; 1; 2; 3}
I(f) = {0; 1}

Observe que, para que uma relação f de A em B seja uma função de A em B, de todo elemento de A deve "partir" uma flecha e uma só:

A relação definida pelo diagrama acima não é função de A em B: do elemento 3 de A não "parte" flecha alguma.

A relação definida pelo diagrama acima não é função de A em B: do elemento 1 de A "parte" mais do que uma flecha.

b) Sejam os conjuntos A = {a; b; c} e B = {x; y; z}. A relação f, de A em B:

$$f = \{(a; x), (b; x), (c; z)\}$$

é uma função de A em B.

Note que cada elemento de A aparece em um e somente em um par ordenado de f.

Nesse exemplo: D(f) = {a; b; c}, CD(f) = {x; y; z} e I(f) = {x; z}.

Por outro lado, a relação de A em B:

$$f = \{(a; x), (a; y), (b; x), (c; z)\}$$

não é função de A em B. O elemento a de A aparece como primeira coordenada em dois pares de f.

E a relação de A em B:

$$f = \{(b; y), (c; z)\}$$

também não é função de A em B. O elemento a de A não aparece como primeira coordenada em nenhum par de f.

Exercícios Resolvidos

5.49) Seja A = {1; 2; 3; 4} e considere as relações sobre A:

$\Re_1 = \{(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 1)\}$

$\Re_2 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4)\}$

$\Re_3 = \{(1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2)\}$

$\Re_4 = \{(2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$

Diga qual delas é função de A em A.

Solução:

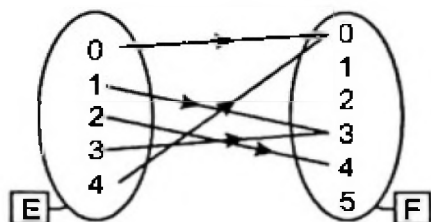
Note que uma relação $\Re$, de A em A, é uma função de A em A se, e somente se, cada a de A aparecer como primeira coordenada em um, e somente em um, par de $\Re$.

$\Re_1$ é função.

$\Re_2$ não é função, pois o elemento 1 aparece como primeira coordenada em mais do que um par.

$\Re_3$ é função.

$\Re_4$ não é função, pois o elemento 1 não aparece como primeira coordenada em par algum da relação.

5.50) Para a função f, de E em F, definida pelo diagrama de flechas:

Determine:

a) D(f)
b) I(f)
c) f(2)
d) x, se f(x) = 3
e) x, se f(x) = 4

Solução:

a) D(f) = E = {0; 1; 2; 3; 4}
Note que se uma relação $\Re$, de E em F, é uma função f de E em F, então D(f) = E.
b) O conjunto-imagem de f é constituído por todos os y de F que são imagem de algum x de E: I(f) = {0; 3; 4}.
c) f(2) = 4; aí uma simples leitura: a "flecha que parte do número 2 dirige-se para o número 4".
d) O elemento x de E tem imagem 3, então x = 1 ou x = 3.
e) Analogamente, x = 2.

5.51) Seja o conjunto A = {0; 1}.

a) Quantas são as relações de A em A?
b) De todas as relações de A em A, quais são funções de A em A?
c) Encontre para as funções de A em A determinadas, as respectivas relações inversas; dessas, quais são funções de A em A?

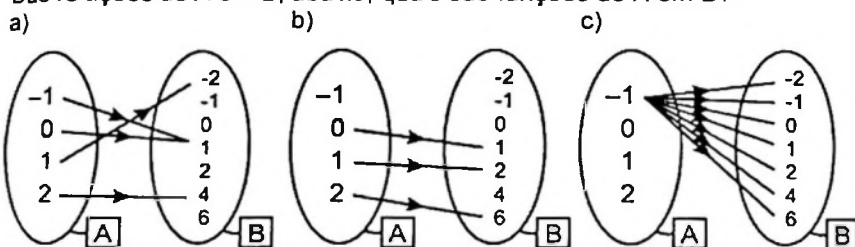
Solução:

a) Lembre que qualquer relação de A em A é um subconjunto do produto cartesiano A × A. O número de elementos de A × A é $n_{A \times A} = 4$, e o número de seus subconjuntos é $2^4 = 16$. Então, o número de relações de A em A é 16.
b) Das 16 relações de A em A, são funções de A em A:

$f_1 = \{(0;\ 0),\ (1;\ 1)\}$
$f_2 = \{(0;\ 1),\ (1;\ 0)\}$
$f_3 = \{(0;\ 0),\ (1;\ 0)\}$
$f_4 = \{(0;\ 1),\ (1;\ 1)\}$

c) $f_1^{-1} = \{(0;\ 0),\ (1;\ 1)\}$
$f_2^{-1} = \{(1;\ 0),\ (0;\ 1)\}$
$f_3^{-1} = \{(0;\ 0),\ (0;\ 1)\}$
$f_4^{-1} = \{(1;\ 0),\ (1;\ 1)\}$
São funções de A em A: f_1^{-1} e f_2^{-1}.

Exercicios Propostos

5.52) Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1; 2} e B = {–2; –1; 0; 1; 2; 4; 6}
Das relações de A em B, abaixo, quais são funções de A em B?
a) b) c)

5.53) Sejam os conjuntos A = {–2; –1; 0; 1; 2} e B = {0; 1; 4; 6}. Considere a função g, de A em B:

$$g = \{(-2;\ 4),\ (-1;\ 1),\ (0;\ 0),\ (1;\ 1),\ (2;\ 4)\}$$

Determine:
a) D(g)
b) I(g)
c) g(2)
d) g(1)
e) x, se g(x) = 4
f) x, se g(x) = x

5.54) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {a; b}. Dar, através de diagramas de flechas, todas as funções de A em B.

5.55) A função f é de A em B. Sabe-se que $a \in A$ e $b \in B$. Dizer qual afirmação abaixo é verdadeira e qual é falsa.
a) f(a) = b
b) $b \in I(f)$
c) $I(f) \subset B$
d) $f(a) \in I(f)$
e) $f(a) \in B$

5.56) $\Re$ é uma relação *reflexiva*, de A em A. $\Re$ é uma função de A em A?

Mais sobre notação

Para se indicar que f é uma função de A em B usam-se as notações:

$$f : A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Há, no entanto, outras maneiras de se representar uma função.

Sejam, por exemplo, os conjuntos A = {0; 1; 2}, B = {–1; 0; 1; 2} e a função f de A em B:

$$f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$$

A função f representada anteriormente está conhecida de uma forma correta e plena; sobre ela temos todas as informações necessárias para sua definição: domínio, contradomínio e a sentença que associa a cada elemento do domínio um único elemento no contradomínio.

Na prática, entretanto, as notações utilizadas são simplificadas, cometendo-se mesmo certo abuso de linguagem. Assim, a mesma função f definida acima pode receber as notações:

$f: x \to f(x) = x - 1, x \in A$
$x \to x - 1, x \in A$
$x \to y = x - 1, x \in A$
$f(x) = x - 1, x \in A$
$y = x - 1$

Observe que nas notações acima o contradomínio de f foi omitido e, na última, não figura sequer o domínio. Simplificações como estas são admissíveis se não houver possibilidade de dúvida.

Funções Iguais

As funções: $f: A \to B$
$g: C \to D$

são iguais se, e somente se, A = C, B = D e f(x) = g(x) para todo x em A.

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1}, B = {0; 1; 2; 3; 4} e as funções de A em B definidas pelas sentenças:

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

As funções f e g são iguais, pois f(–1) = g(–1) = 1, f(0) = g(0) = 2 e f(1) = g(1) = 3

Exercícios Resolvidos

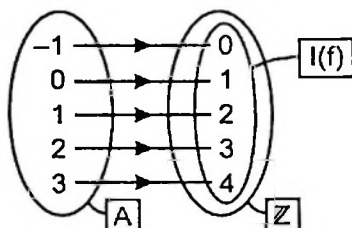
5.57) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$. Considere a função f, de A em $\mathbb{Z}$, definida pela sentença: f(x) = x + 1.

a) Determine f(–1), f(0) e f(5).
b) Dê a função f por enumeração de seus elementos.
c) Dê a função f através de um diagrama de flechas.
d) Determine I(f).
e) Determine x, x ∈ A, tal que f(x) = 3.
f) Desenhe o gráfico de f.

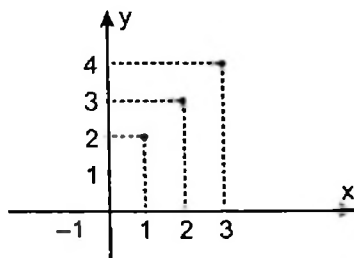
Solução:

a) Na sentença $f(x) = x + 1$, para se obter $f(-1)$ substituímos x por -1:
$f(-1) = -1 + 1 = 0$; analogamente, substituindo x por zero: $f(0) = 0 + 1 = 1$.
Não existe $f(5)$, pois $5 \notin A$.

b) $f(-1) = 0$, então $(-1; 0) \in f$
$f(0) = 1$, então $(0; 1) \in f$
$f(1) = 2$, então $(1; 2) \in f$
$f(2) = 3$, então $(2; 3) \in f$
$f(3) = 4$, então $(3; 4) \in f$
Daí, $f = \{(-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4)\}$

c)

d) $I(f) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

e) A equação proposta pergunta para qual valor de x, $x \in A$, cuja imagem é igual a 3; uma simples leitura nos dá $x = 2$.

f)

5.58) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, \text{ se } x \in C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Determine:

a) $f(2)$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(\sqrt{2})$

d) $f(\pi)$

e) $f(0{,}333...)$

Solução:

A sentença que define f afirma que todo *número racional* x tem para imagem o próprio x, f(x) = x, e que todo *número irracional* x tem para imagem $\sqrt{2}$, f(x) = $\sqrt{2}$.

Então:

a) $2 \in \mathbb{Q}$, então f (2) = 2

b) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, então $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{2}$ é irracional, então $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

d) π é irracional, então $f(\pi) = \sqrt{2}$

e) $0,333\ldots = \frac{1}{3}$ é racional, então f(0,33...) = 0,33...

5.59) Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela sentença: $f(x) = \frac{5x-4}{2}$. Qual é o elemento do domínio de f que tem o número 8 como imagem?

Solução:

Procuramos x, $x \in \mathbb{R}$, tal que sua imagem seja 8, isto é:

$$f(x) = 8.$$

Devemos então resolver a equação:

$$\frac{5x-4}{2} = 8$$

e daí x = 4.

5.60) As funções:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$$

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

são iguais?

Solução:

Não, pois $D(f) \neq D(g)$.

Exercícios Propostos

5.61) Sejam o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ e a função f, de E em $\in \mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ x, \text{ se } \ 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

a) Determine f enumerando os seus elementos.
b) Determine o conjunto-imagem de f.

c) Resolva a equação $f(x) = x$.
d) Faça o gráfico de f.

5.62) Seja a função f, de $A = \{0; 1; 2\}$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Determine $I(f)$

5.63) Seja a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é par} \\ 0, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) $f(0)$
b) $f(1)$
c) $f(-1)$
d) $f(2)$

5.64) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 + x + 2.$$

Qual é o elemento do domínio de f que tem imagem igual a 2?

5.65) Sejam os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{0; 1; 2; 3\}$. As funções f e g, de A em B, definidas por:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x}$$

são iguais?

5.66) As funções f e g definidas por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{x}$$

são iguais?

Função real de variável real

6.1 – FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL - GENERALIDADES

O Conceito

Uma função f diz-se **função real de variável real** se $D(f) \subset \mathbb{R}$ e $CD(f) \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = x^2$$

é a *função real de variável real.*

Observe que a imagem de qualquer elemento x do domínio $\mathbb{R}$ é obtida elevando-se ao quadrado o número x. Por exemplo, se quisermos a imagem do número 2:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

De uma outra forma, para obtermos a imagem do número 2, f(2), na sentença (fórmula): $f(x) = x^2$, substituímos a letra x pelo número 2 e efetuamos as operações indicadas.

Domínio e Contradomínio

Vimos que, para se definir uma função f, necessitamos de dois conjuntos: o seu **domínio**, o seu **contradomínio** e, ainda, da **sentença aberta** (uma "fórmula", uma "lei") que descreve como se "associa" a cada elemento do domínio de f um único elemento no contradomínio de f.

Na prática, entretanto, tratando-se de função real de variável real, é comum omitir-se o domínio e o contradomínio, dando-se somente a sentença aberta ("fórmula") que estabelece a correspondência entre x e f(x).

Quando isto acontecer, está convencionado o seguinte:

1°) O **contradomínio** da função f é $CD(f) = \mathbb{R}$.

2°) O **domínio** da função f, D(f), é o subconjunto de $\mathbb{R}$, constituído por todos os valores de x para os quais as operações indicadas na "fórmula" são *possíveis, gerando como resultado das operações um número real.*

Exemplos

a) A função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

tem para domínio o subconjunto de $\mathbb{R}$ constituído por todos os valores de x para os quais $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Então:

$$D(f)\ [1; +\infty[\text{ e, } CD(f) = \mathbb{R}$$

b) Para a função definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

o domínio é constituído pelos números reais x tais que $x - 1 \neq 0$, isto é:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \text{ e, } CD(f) = \mathbb{R}$$

Exercícios Resolvidos

6.1) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Solução:

a) *Para todo* x real as operações indicadas na "fórmula" são possíveis e geram como resultado um número real; daí:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

b) Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis deve-se ter: $x^2 - 1 \neq 0$, isto é, $x \neq 1$ e $x \neq -1$;

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

c) Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis e para que o resultado seja um número real deve-se ter:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

e daí $x \leq -1$ ou $x \geq 1$; então:

$$D(f) =]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$$

d) Deve-se ter: $x^2 - 1 > 0$ e daí:

$$D(f) =]-\infty ; -1[\cup]1; +\infty[$$

6.2) *Para a função f, definida por:*

$$f(x) = \frac{\sqrt{-(x^2 - 4)^2}}{x - 2}$$

determine:

a) D(f)

b) I(f)

c) CD(f)

Solução:

a) Devemos ter:

(I) $-(x^2-4)^2 \geq 0$ e daí $(x^2-4)^2 \leq 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow (x=2$ ou $x=-2)$

(II) $x-2 \neq 0$ e daí $x \neq 2$

Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis, o real x deve satisfazer à condição (I) e também à condição (II), isto é, x deve pertencer a (I) $\cap$ (II); então:

$$D(f) = \{-2\}$$

b) O único elemento de D(f) é −2; para se obter sua imagem, em f(x), substituímos x por −2; daí f(−2) = 0:

$$I(f) = \{0\}$$

c) Por convenção:

$$CD(f) = \mathbb{R}$$

6.3) Dê o domínio da função definida por:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$$

Solução:

Devemos ter:

$$\left.\begin{array}{l}(I)\ x-2 \geq 0 \text{ e daí } x \geq 2\\(II)\ 4-x \geq 0 \text{ e daí } x \leq 4\end{array}\right\} \xrightarrow{x \in (I) \cap (II)} 2 \leq x \leq 4$$

$$D(f) = [2;\ 4]$$

Exercícios Propostos

6.4) Determine o domínio de cada uma das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

6.5) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-2)}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

d) $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$

6.6) Determine os domínios das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}$

6.7) Determine os domínios das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

6.8) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas.

a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

6.9) Para a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{-(x^2 - 1)^2}$$

determine:

a) D(f)

b) I(f)

c) CD(f)

6.10) Determine o domínio da função f definida por:

$$f(x) = \sqrt{-ax}\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

6.11) O domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sqrt{-x+m}$$

é $D(f) =]-\infty\ ;\ 3]$.

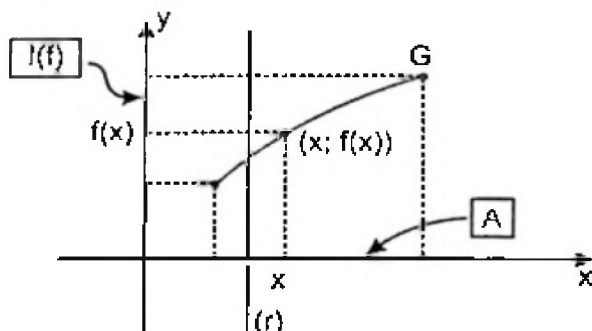
Determine m.

Gráfico de uma Função Real de Variável Real

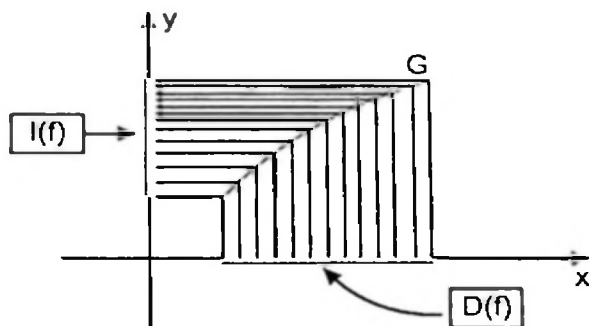
Para se representar graficamente uma função real de variável real:

$$f: A \to B$$

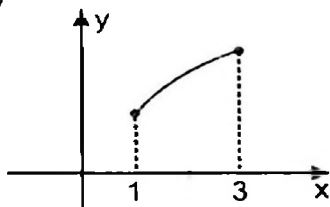
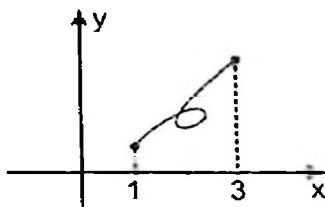
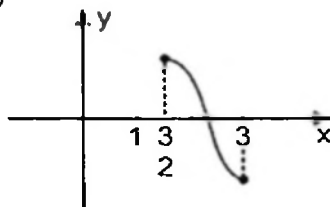
procede-se de forma análoga à representação gráfica de uma relação de A em B.

Então, fixa-se no plano um sistema de coordenadas ortogonais xOy; o conjunto G de todos os pontos (x; f(x)), com x em A, é o gráfico de f.

Observe o seguinte:

1º) Toda reta (r), vertical, que passa por um ponto de A = D(f) corta o gráfico G em um só ponto.
Temos aí um critério para verificarmos através do gráfico se uma *relação* de A em B é uma *função* de A em B, basta verificarmos "se uma reta vertical (r), conduzida pelos pontos de A, encontra o gráfico de f e o encontra em um único ponto".

2º) Quando se conhece o gráfico G de uma função f, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox, na direção Oy; o conjunto-imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre Oy, na direção Ox:

Exercícios Resolvidos

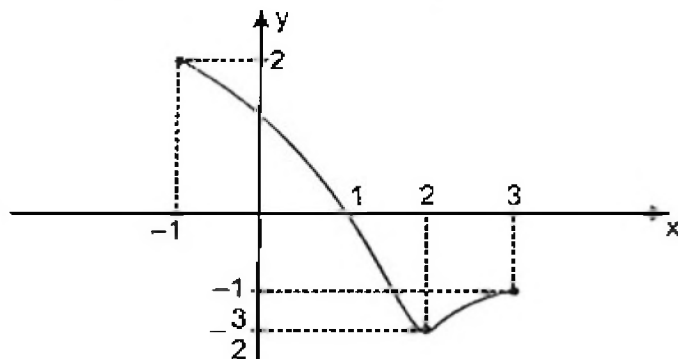
6.12) Entre as relações f, de A = [1; 3] em ℝ, representadas pelos gráficos abaixo, qual é função de A em ℝ?

a)

c)

b)

Solução:

a) É, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de A encontra sempre o gráfico de f em um único ponto.

b) Não é, pois as retas verticais conduzidas por pontos de A, com $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ não encontram o gráfico de f.

c) Não é, pois há retas verticais conduzidas por pontos de A que encontram o gráfico de f em mais do que um ponto.

6.13) Seja a função f definida pelo gráfico abaixo:

Determine:

a) D(f)

b) I(f)

c) x tal que f(x) = 0

d) x tal que f(x) > 0

Solução:

a) Para determinarmos o domínio de f projetamos o gráfico de f sobre Ox, na direção Oy. Então:

$$D(f) = [-1; 3]$$

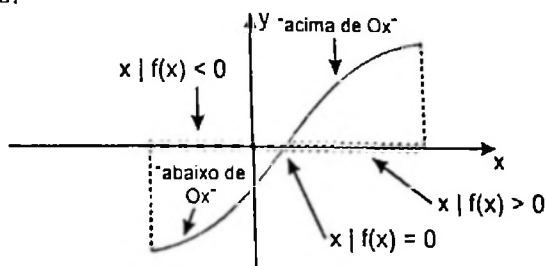
b) Para determinarmos o conjunto-imagem de f projetamos o gráfico de f sobre Oy, na direção Ox. Então:

$$I(f) = \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$$

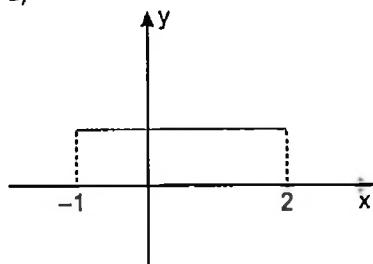
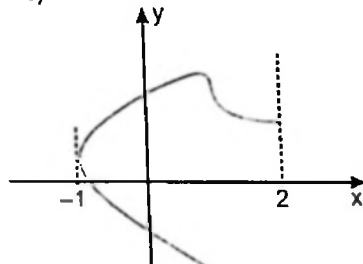
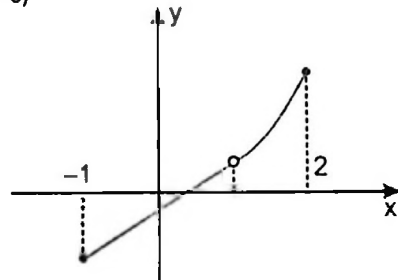
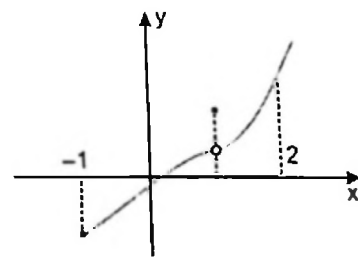
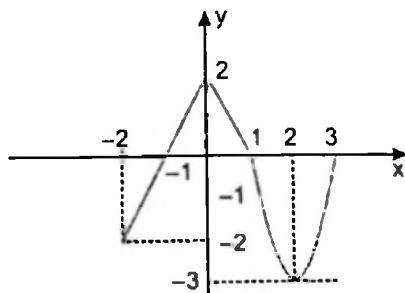
c) Queremos determinar x, x ∈ D(f), tal que sua imagem seja *zero*; devemos procurar os pontos onde o gráfico "encontra" o eixo Ox: a abscissa x desse ponto é tal que a imagem de x é zero, isto é, f(x) = 0. Em nosso exemplo, encontramos x = 1.

d) Queremos determinar x, x ∈ D(f), tal que sua imagem seja *positiva*; devemos procurar os pontos para os quais o gráfico "está acima" do eixo Ox: as abscissas x desses pontos são tais que f(x) > 0.

Em nosso exemplo, $-1 \leq x < 1$ responde à questão proposta.

Resumo:

Exercícios Propostos

6.14) Seja A = [−1; 2]. Quais das relações de A em ℝ, representadas abaixo, são funções de A em ℝ?

a)

b)

c)

d)

6.15) Seja a função f definida pelo gráfico abaixo:

Determine:

a) D(f) e I(f)
b) f(−2), f(0), f(1), f(2) e f(3)
c) x tal que f(x) = 0
d) x tal que f(x) > 0

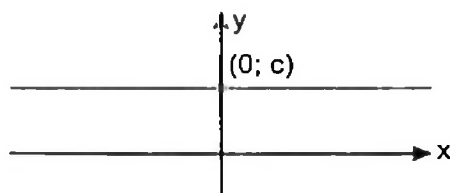
6.2 – ALGUMAS FUNÇÕES USUAIS

Função Constante

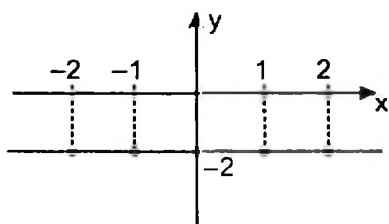
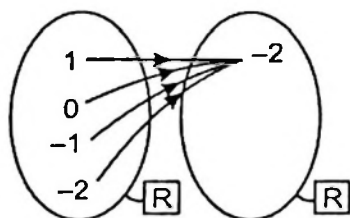
É a função de ℝ em ℝ, que associa a *todo* x real *sempre um mesmo número* c, c ∈ ℝ; então, a sentença aberta que a define é:

$$\boxed{f(x) = c}$$

Seu conjunto-imagem é I(f) = {c}.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, c)

Exemplo

Seja a função de ℝ em ℝ, definida por f(x) = −2.

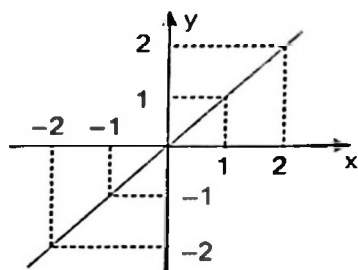
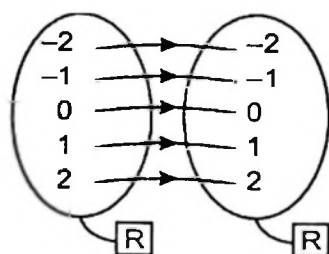
Seu conjunto-imagem é I(f) = {−2}.

x	y
−2	−2
−1	−2
0	−2
1	−2
2	−2
⋮	⋮

Função Identidade

É a função de ℝ em ℝ, que associa a *cada* x real o *próprio* x; então, a sentença aberta que a define é:

$$\boxed{f(x) = x}$$

Seu conjunto-imagem é I(f) = ℝ.

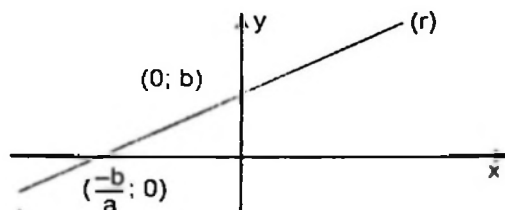
O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

x	y
–2	–2
–1	–1
0	0
1	1
2	2
⋮	⋮

Função Polinômio do 1° Grau

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada x real o número real ax + b, com a ≠ 0; então, a sentença aberta que a define é:

$$\boxed{f(x) = ax + b,\ a \neq 0}$$

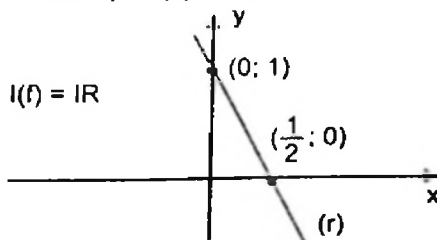
Se b = 0, isto é, f(x) = ax, a função diz-se **linear**.

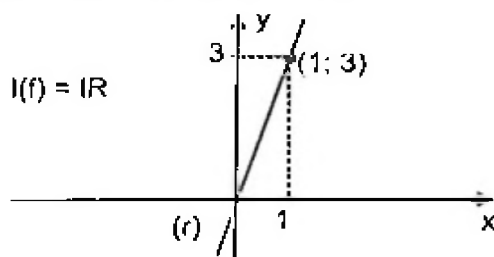
O gráfico da função polinômio do 1° grau é uma *reta* (r) (a demonstração encontra-se no curso de Geometria Analítica desta coleção):

x	y
0	b
$-\frac{b}{a}$	0

O conjunto-imagem da função polinômio do 1° grau é I(f) = $\mathbb{R}$ (projeção da reta (r) sobre o eixo Oy).

A sentença aberta f(x) = ax + b, que define a função, denomina-se **equação da reta (r)**; nela, o coeficiente a denomina-se **coeficiente angular** de (r), e b, **coeficiente linear** de (r). Note que o coeficiente linear de (r) é a ordenada do ponto onde (r) encontra o eixo Oy.

Exemplos

a) Na função f, definida por f(x) = –2x + 1 tem-se a = –2 e b = 1.

O *coeficiente angular* de (r) é a = –2; seu *coeficiente linear* é b = 1.

b) Seja a função f, *linear*, definida por $f(x) = 3x$; o *coeficiente angular* da reta (r) é $a = 3$ e o seu *coeficiente linear* é $b = 0$:

Exercícios Resolvidos

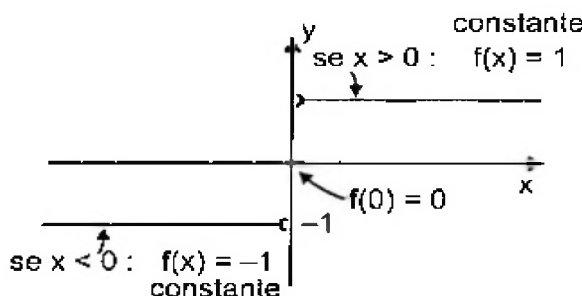
6.16) Chama-se **função sinal de x** função f, de ℝ em ℝ, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine $f(-2)$, $f(0)$ e $f(2)$
b) Gráfico de f
c) Qual é o conjunto-imagem de f?

Solução:

Observe que todo real negativo tem imagem -1, que zero tem imagem zero e que todo real positivo tem imagem 1; então:

a) $f(-2) = -1$, $f(0) = 0$ e $f(2) = 1$
b)

c) É imediato que $I(f) = \{-1; 0; 1\}$.

6.17) Seja a função f, de ℝ em ℝ, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

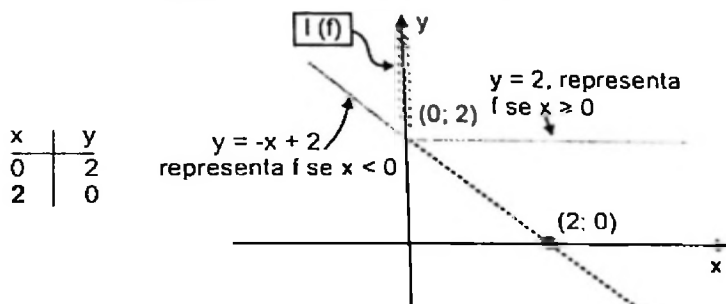
a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza I(f)

Solução:

a) O gráfico de f é constituído por duas semi-retas.

1ª) se $x \geq 0$ f é representada pela reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0; 2)

2ª) se $x < 0$ f é representada pela reta $y = -x + 2$.

x	y
0	2
2	0

b) A projeção do gráfico sobre Oy nos dá: $I(f) = [2; +\infty[$.

6.18) O gráfico da função polinômio do 1º grau, definida pela sentença aberta $y = f(x) = ax + b$ é a reta que passa pelos pontos (1; 2) e (–1; 3). Determine a e b.

Solução:

O ponto (1; 2) pertence à reta e, então, fazendo $x = 1$ e $y = 2$ a sentença $y = ax + b$ fica satisfeita:

$$2 = a + b \text{ (I)}$$

Analogamente, como (–1; 3) pertence à reta:

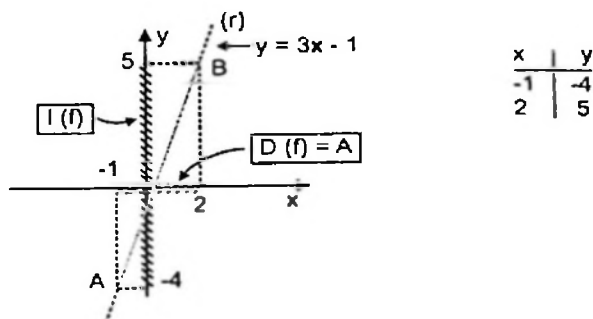
$$3 = -a + b \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$a = \frac{5}{2} \text{ e } b = -\frac{1}{2}$$

6.19) Uma função f tem domínio $A = [-1; 2]$ e é definida pela sentença aberta $y = f(x) = 3x - 1$. Faça o gráfico de f e deduza I(f).

Solução:

x	y
-1	-4
2	5

O segmento $\overline{AB}$ é o gráfico de f.
O gráfico de f projetado sobre Oy nos dá: I(f) = [−4; 5].

6.20) Seja f : A → B uma função real de variável real. Chama-se **zero de f** todo x, $x \in A$, tal que f(x) = 0. Determine o *zero* da função f, de ℝ em ℝ, definida por f(x) = ax + b, a ≠ 0.

Solução:

Note que para uma função f, se x é um zero, a sua imagem é zero, isto é, f(x) = 0. Para determinarmos o *zero* da função definida por f(x) = ax + b, a ≠ 0, resolvemos a equação f(x) = 0:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{-b}{a}.$$

.ntão, o zero da função polinômio do 1º grau definida por f(x) = ax + b é $x = \frac{-b}{a}$, isto é, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exercícios Propostos

6.21) Para cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas abaixo, determine o domínio, o conjunto-imagem e esboce o gráfico:
a) f(x) = −3
b) f(x) = 0
c) f(x) = −x
d) f(x) = 3x + 2

6.22) Determine o ponto comum dos gráficos das funções f e g definidas respectivamente por f(x) = 3x −1 e g(x) = 4x + 1.

6.23) Seja a função f, de ℝ em ℝ, definidas por:

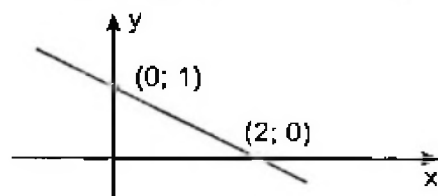
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < -1 \\ 1, \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ 2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determine f(−2), f(−1), f(0) e f(2).
b) Desenhe o gráfico de f.
c) Dê I(f)

6.24) Uma função f, de ℝ em ℝ, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x < -1 \\ 2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza I(f)

6.25) O gráfico de uma função polinômio do 1º grau, definida pela sentença aberta $y = f(x) = ax + b$ é a reta da figura. Determine a e b.

6.26) Seja $f : A \to B$ uma função real de variável real. Chama-se ponto fixo de f a todo x, $x \in A$, tal que $f(x) = x$. Discutir, segundo os valores de m, a existência de *ponto fixo* para a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + 1$.

6.27) Uma função f tem domínio $A = [-2, 1]$ e é definida pela sentença aberta $y = f(x) = -x + 1$. Faça o gráfico de f e deduza I(f).

6.28) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 4x + 2$$
$$g(x) = 2x - 1$$

a) Resolva a equação $f(x) - 2 \cdot g(x) = 0$
b) Resolva a inequação $f(x) > g(x)$

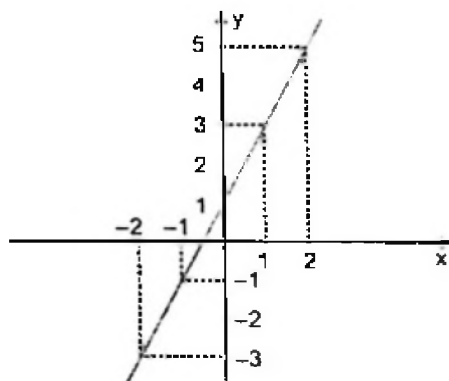
6.3 – FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Função Crescente

Consideremos a função polinômio do 1º grau definida pela sentença aberta:

$$f(x) = 2x + 1$$

Observe na tabela ou no gráfico que "aumentando-se x", "aumentam" os correspondentes valores de y:

x	y = f(x)
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5
⋮	⋮

Uma função com tal comportamento diz-se **crescente em** $\mathbb{R}$. Observe que, no exemplo, se atribuirmos a x dois valores reais distintos x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, obtém-se $f(x_1) < f(x_2)$.

> Uma função f, real de variável real, diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:
>
> $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 < f(x_2)$$

Uma forma equivalente para se colocar a definição acima é:

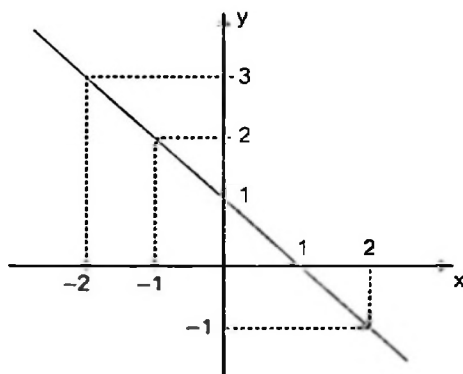
> Uma função f, real de variável real, diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, tem-se:
>
> $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

Função Decrescente

Analogamente, consideremos a função polinômio do 1º grau definida pela sentença aberta:

$$f(x) = -x + 1$$

Observe agora, na tabela ou no gráfico, que, "aumentando-se" x, "diminuem" os correspondentes valores de y:

x	y = f(x)
−2	3
−1	2
0	1
1	0
2	−1
⋮	⋮

Uma função com tal comportamento se diz **decrescente em** $\mathbb{R}$: Observe no exemplo que, se atribuirmos a x dois valores reais distintos x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, obtém-se: $f(x_1) > f(x_2)$.

> Uma função f, real de variável real, diz-se **decrescente em I**, $I \subset D(f)$, se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:
>
> $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 > f(x_2)$$

Uma forma equivalente para se colocar a definição acima é:

Uma função f, real de variável real, diz-se **decrescente** em I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, tem-se:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

Exercícios Resolvidos

6.29) Verifique que a função definida por $f(x) = 3x + 1$ é *crescente* em $\mathbb{R}$.

Solução:

Devemos calcular $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 + 1) - (3x_2 + 1) = 3(x_1 - x_2)$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{negativo} \\ \text{pois} \\ x_1 < x_2}} < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e a função é *crescente* em $\mathbb{R}$.

6.30) Seja a *função polinômio do 1º grau*, f, definida por:

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Verifique que se $a > 0$, f é *crescente* em $\mathbb{R}$.

Solução:

Calculemos $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a\,(x_1 - x_2)$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{a}_{\text{positivo}}\ \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{negativo,} \\ \text{pois} \\ x_1 < x_2}} < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e a função é *crescente* em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$.

6.31) Seja a função f, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Dê o domínio de f.

b) Verifique que f é *decrescente* em $\mathbb{R}_+^*$.

Solução:

a) O domínio de f é constituído por todos os valores reais de x tais que $x \neq 0$

$D(f) = \mathbb{R}^*$

b) Calculemos $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{\text{positivo, pois } x_1 < x_2}}{\underbrace{x_1 \; x_2}_{\text{positivos, pois } x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}_+^*}} > 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, e a função f é *decrescente* em $\mathbb{R}_+^*$.

Exercícios Propostos

6.32) Verifique que a função definida por $f(x) = -2x + 6$ é *decrescente* em $\mathbb{R}$.

6.33) Seja a *função polinômio do 1º grau*, f, definida por:

$$f(x) = ax + b, \; a \neq 0$$

Verifique que se $a < 0$, f é *decrescente* em $\mathbb{R}$.

6.34) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Verifique que f é *crescente* em $\mathbb{R}_-^*$.

6.35) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = x^2.$$

Verifique que f é *crescente* em $\mathbb{R}_+$.

6.36) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = (m^2 - 1)x + 3,\ m \in \mathbb{R}.$$

a) Determine m para que f seja *crescente* em $\mathbb{R}$.

b) Determine m para que f seja *decrescente* em $\mathbb{R}$.

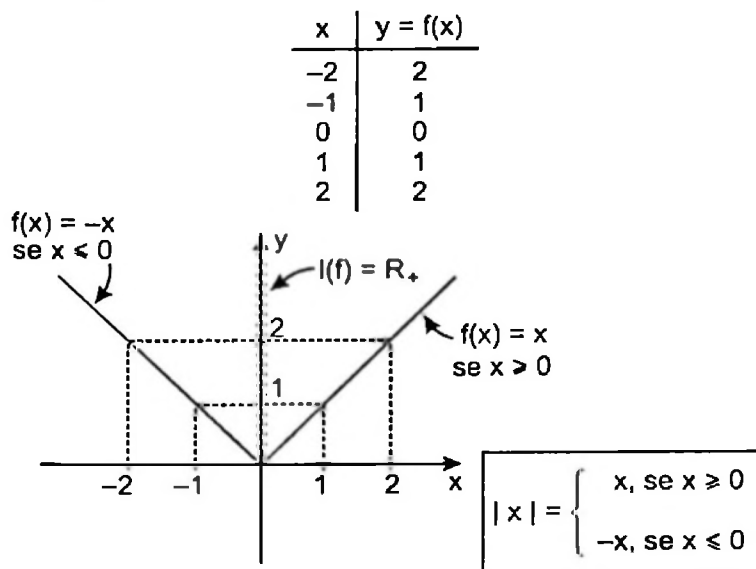
6.4 – FUNÇÃO MÓDULO

Definição e Propriedades

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $|x|$; então, a sentença aberta que a define é:

$$\boxed{f(x) = |x|}$$

O gráfico da função módulo é constituído pela união de duas semi-retas, como mostra a figura:

x	y = f(x)
–2	2
–1	1
0	0
1	1
2	2

Seu conjunto-imagem é $I(f) = \mathbb{R}_+$.

Exercícios Resolvidos

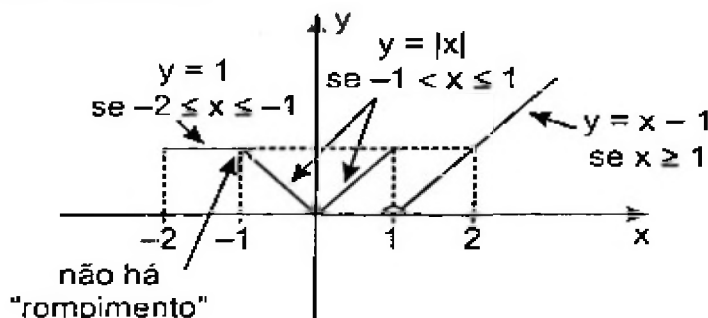
6.37) Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ |x| & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f.
b) Determine D(f) e I(f).
c) Resolva a equação $f(x) = 1$.

Solução:

a) Observe que
1º) se $-2 \le x \le -1$, a reta $y = 1$, paralela ao eixo Ox, representa a função f;
2º) se $-1 < x \le 1$, f é representada pelo gráfico de $y = |x|$;
3º) se $x > 1$, f é representada pela reta de equação: $y = x - 1$.

Então, o gráfico:

y = x − 1

x	y
1	0
2	1

b) A projeção do gráfico de f sobre os eixos Ox e Oy nos dá.

$$D(f) = [-2; +\infty[$$
$$I(f) = \mathbb{R}_+$$

c) Resolver a equação $f(x) = 1$ é determinar todo x, $x \in D(f)$, tal que a imagem seja igual a 1; do gráfico:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le -1 \vee x = 1 \vee x = 2\}$$

6.38) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |2x|$$

Solução:

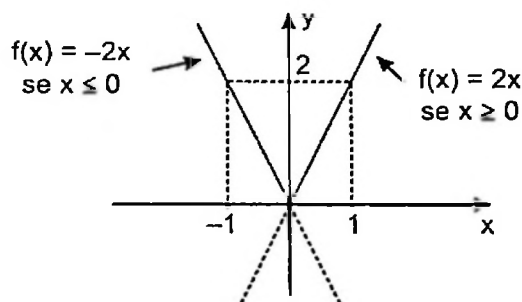
A definição de *módulo* de um número real nos dá:

Se $2x \ge 0$, isto é, $x \ge 0$: $|2x| = 2x$ e $f(x) = 2x$

Se $2x \le 0$, isto é, $x \le 0$: $|2x| = -2x$ e $f(x) = -2x$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \ge 0 \\ -2x, \text{ se } x \le 0 \end{cases}$$

O gráfico de f e a união de duas semi-retas, como mostra a figura:

$I(f) = \mathbb{R}_+$

6.39) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x + 1|$$

Solução:

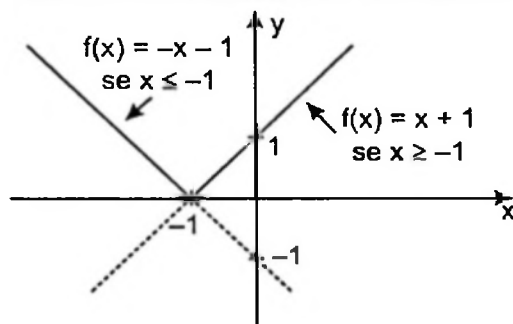
A definição de *módulo* de um número real nos dá:

Se $x + 1 \geq 0$, isto é, se $x \geq -1$: $|x + 1| = x + 1$ e $f(x) = x + 1$

Se $x + 1 \leq 0$, isto é, se $x \leq -1$: $|x + 1| = -(x + 1)$ e $f(x) = -x - 1$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq -1 \\ -x - 1, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas como mostra a figura:

$I(f) = \mathbb{R}_+$

6.40) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x| + 1$$

Solução:

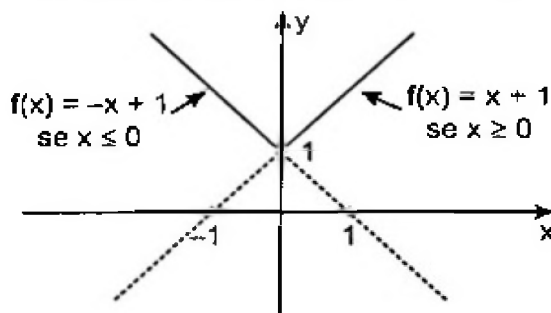
A definição de *módulo* de um número real nos dá:

Se $x \geq 0$; $|x| = x$ e $f(x) = x + 1$

Se $x \leq 0$; $|x| = -x$ e $f(x) = -x + 1$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq 0 \\ -x+1, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas como mostra a figura:

I(f) = [1; + ∞ [

6.41) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

a) Determine f(–2) e f(2).
b) Determine D(f).
c) Construa o gráfico de f.

Solução:

a) $f(-2) = \frac{|-2|}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

$f(2) = \frac{|2|}{2} = \frac{2}{2} = 1$

b) Devemos ter $x \neq 0$, isto é, $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

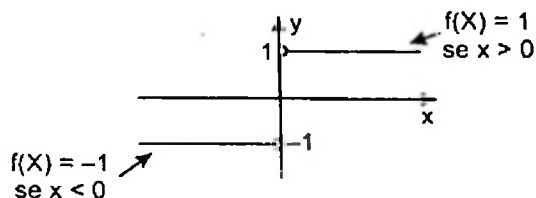
c) A definição de *módulo* de um número real nos dá:

Se $x > 0$: $|x| = x$ e $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Se $x < 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas paralelas ao eixo Ox, como mostra a figura:

I(f) = [−1; 1[

6.42) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$$

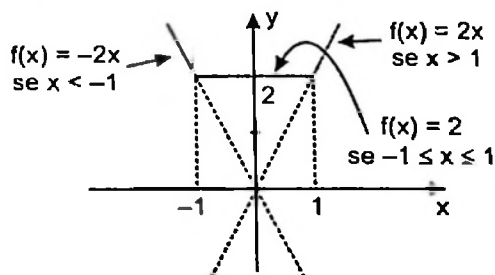
Solução:

Inicialmente, determinamos os valores −1 e 1 onde os números x + 1 e x − 1 "mudam" de sinal; então a tabela:

x	−∞	−1		1	+∞
| x + 1 |	− x − 1	0	x + 1	2	x + 1
| x − 1 |	− x + 1	2	−x + 1	0	x − 1
f(x)	− 2x	2	2	2	2x

Na tabela, observe por exemplo que, se $x < -1$, então $x + 1 < 0$ e daí $|x + 1| = -x - 1$; analogamente, se $x > 1$ então $x - 1 > 0$ e daí $|x - 1| = x - 1$; se $x = -1$ tem-se $|x + 1| = 0$ e $|x - 1| = 2$.
Também, note que f(x) é a *soma* de $|x + 1|$ com $|x - 1|$.
Então,

$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ se } x < -1 \\ 2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas mais um segmento de reta, como mostra a figura:

I(f) = [2; + ∞ [

Exercicios Propostos

6.43) Verifique que a função definida por $f(x) = |x|$ é *crescente* em $\mathbb{R}_+$ e *decrescente* em $\mathbb{R}_-$.

6.44) A função definida por $f(x) = |x|$ possui algum *ponto fixo*? Qual é o seu *zero*?

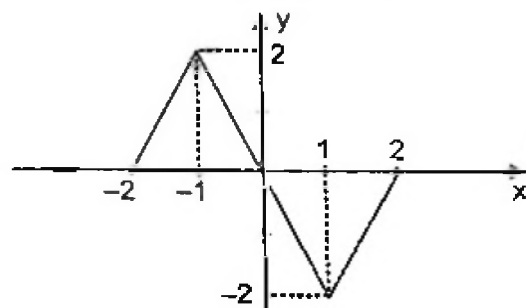
6.45) Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ se } x \le 2 \text{ ou } x > 3 \\ 2, \text{ se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

a) Determine $f(-2)$, $f(2)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$ e $f(\pi)$.
b) Esboce o gráfico de f.
c) Determine D(f) e I(f).
d) Determine x tal que $f(x) = 2$.

6.46) Construa o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo:
a) $f(x) = 2|x|$
b) $f(x) = |3x|$
c) $f(x) = |x - 2|$
d) $f(x) = |x| - 2$
Diga, em cada caso, qual é o conjunto-imagem da função.

6.47) Construa o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo:
a) $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2}$
b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} + 1$
c) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1} \cdot x$
Dê, em cada caso, o domínio e o conjunto-imagem da função.

6.48) Uma função f, de domínio $A = [-2; 2]$, é definida pelo gráfico abaixo:

a) Determine I(f)
b) Desenhe o gráfico de uma função g, de domínio A, definida por:

$$g(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

c) Determine I(g).
d) Resolva a equação $f(x) = g(x)$.

6.49) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = |x - 1| + |x - 4|$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Determine I(f).

6.50) Seja a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = -1 + |x + 1| - 2|x| + |x - 1|$$

a) Construa o gráfico de f.
b) Dê I(f).

6.51) Para os números reais a e b, $a \leq b$, definem-se:

máx (a; b) = b

min (a; b) = a

Assim, por exemplo, máx (2; 3) = 3, máx (2; 2) = min (2; 2) = 2, min (2; 3) = 2.

Desenhe o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \text{máx. } (2; |x|)$$

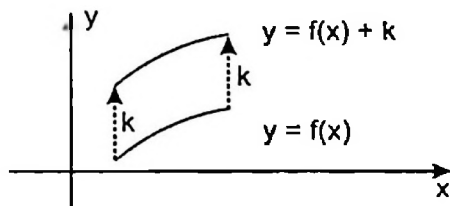
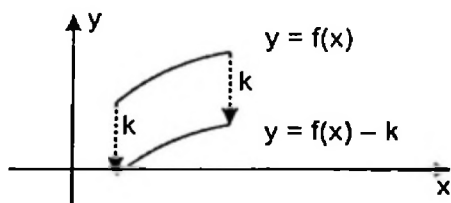
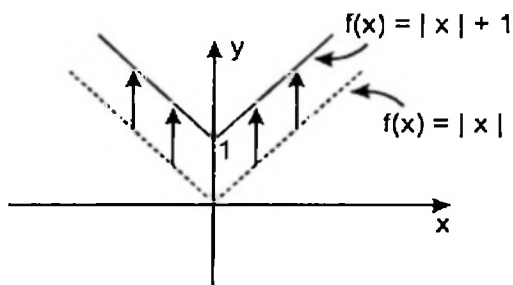
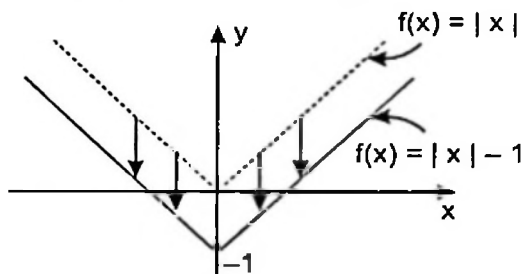
Qual é o conjunto-imagem de f?

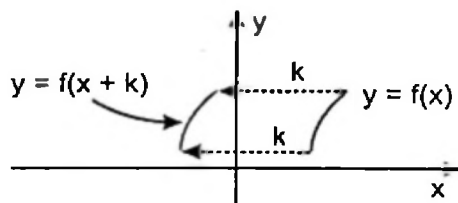
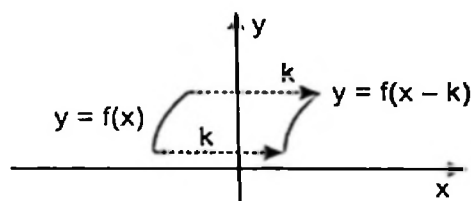
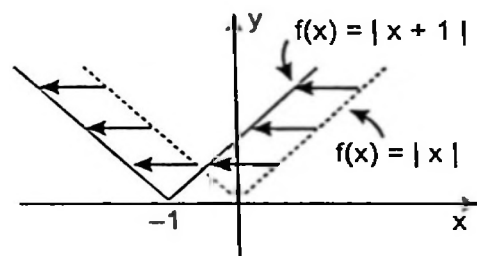
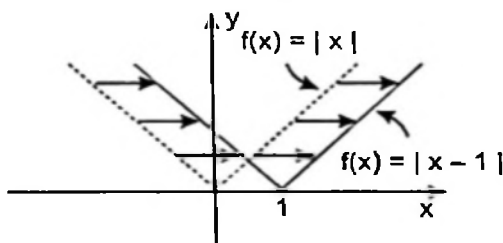
6.5 – TRANSFORMAÇÕES NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

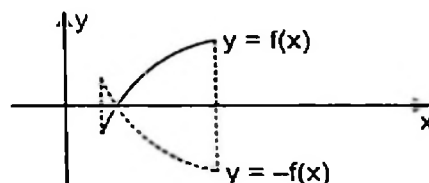
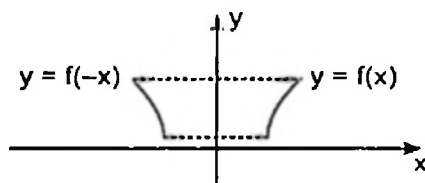
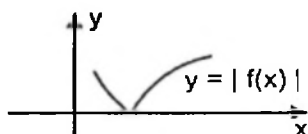
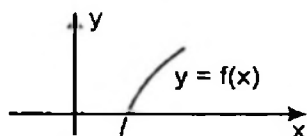
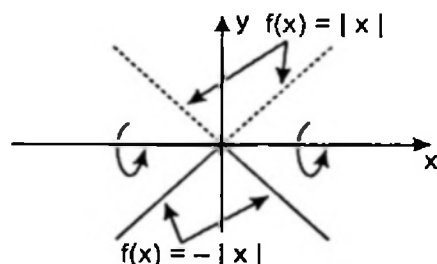
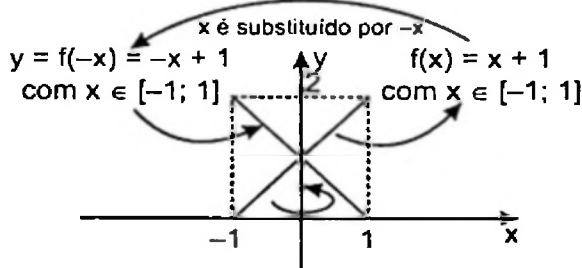
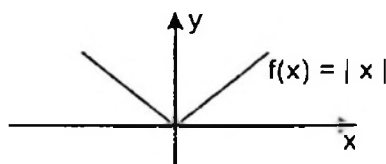
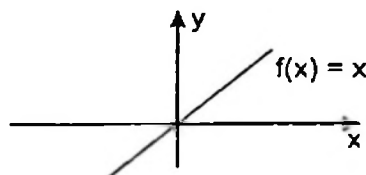
Certas *transformações* (translações, reflexões,...) podem ser feitas sobre o gráfico de uma função, possibilitando a sua construção com alguma facilidade.

Vamos examinar as transformações mais importantes.

Seja, então, a função definida pela sentença aberta $y = f(x)$ e seja o número real k, *positivo*.

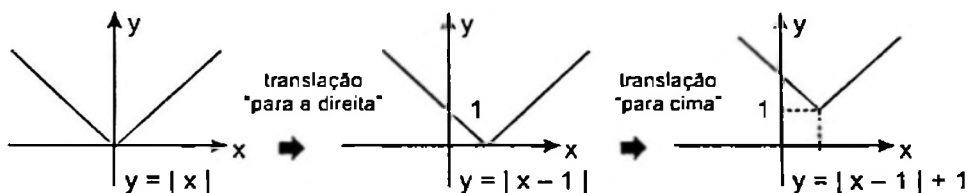
I. O gráfico da função definida por $y = f(x) + k$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy, "para cima".

O gráfico da função definida por $y = f(x) - k$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy, "para baixo".

Exemplos

O gráfico da função $f(x) = |x|$ sofreu uma translação "para cima", obtendo-se o gráfico da função $f(x) = |x| + 1$.

O gráfico da função $f(x) = |x|$ sofreu uma translação "para baixo", obtendo-se o gráfico da função $f(x) = |x| - 1$.

II. O gráfico da função definida por $y = f(x + k)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, "para a esquerda".

O gráfico da função definida por $y = f(x - k)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, "para a direita".

Exemplos

O gráfico da função $f(x) = |x|$ sofreu uma translação "para a esquerda", obtendo-se o gráfico da função $f(x) = |x + 1|$.

O gráfico da função $f(x) = |x|$ sofreu uma translação "para a direita", obtendo-se o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$.

III. O gráfico da função definida por $y = -f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *reflexão* em relação ao eixo Ox.

O gráfico da função definida por $y = f(-x)$ pode ser obtido do gráfico da função $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma *reflexão* em relação ao eixo Oy.

Se conhecemos o gráfico da função definida por y = f(x) e quisermos o gráfico da função definida por y = |f(x)| faz-se a "parte" que está "abaixo" do eixo Ox do gráfico de y = f(x) sofrer uma *reflexão* em torno do eixo Ox.

Exemplos

O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Ox, obtendo-se o gráfico da função f(x) = – |x|.

Para x ∈ [–1; 1], o gráfico da função f(x) = x + 1 sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Oy, obtendo-se o gráfico da função f(x) = –x + 1 (esta se obtém da primeira, substituindo-se x por –x).

A parte "abaixo" do eixo Ox "reflete" em torno do eixo Ox. y = f(x) ⇒ y = |f(x)|

Exercicios Resolvidos

6.52) Construa o gráfico da função definida por $f(x) = |x - 1| + 1$.

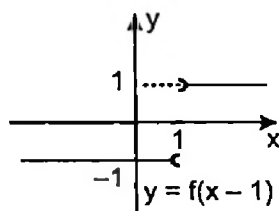
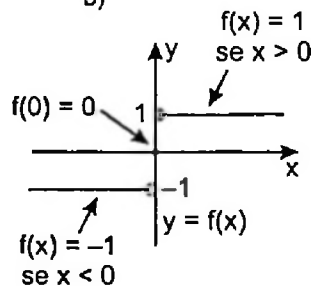
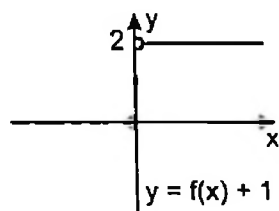
Solução:

6.53) Seja a função f, de ℝ em ℝ, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

a) Determine o conjunto-imagem de f.
b) Desenhe o gráfico de f e deduza os gráficos das funções def. $y = f(x - 1)$ e $y = f(x) + 1$.

Solução:

a) Observe que todo real negativo tem imagem –1, zero tem imagem zero e que todo real positivo tem imagem 1; dai $I(f) = \{-1; 0; 1\}$. (Veja o exercício 6.16)

b)

O gráfico de y = f(x) deslocou-se "para a direita" de 1.

O gráfico de y = f(x) deslocou-se "para cima" de 1.

Exercícios Propostos

6.54) Desenhe os gráficos das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = |x| + 2$
b) $f(x) = |x + 2|$
c) $f(x) = |x| - 2$
d) $f(x) = |x - 2|$

6.55) Desenhe os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $y = ||x - 2| - 1|$

b) $y = 1 - |x - 1|$
c) $y = |-x - 1| + 1|$

6.56) Seja a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f
b) Deduza: D(f) e I(f)
c) Desenhe os gráficos das funções definidas por:

$y = f(x) + 1$; $y = f(x - 1)$; $y = f(-x)$; $y = 1 - f(x)$

6.57) Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

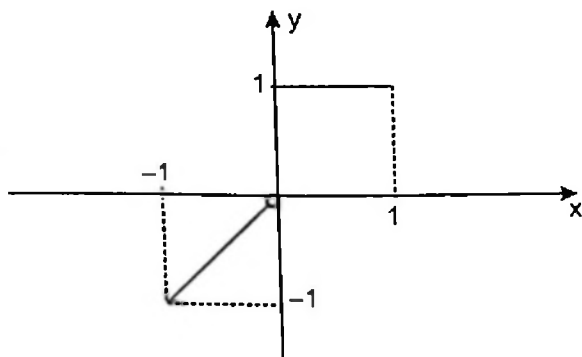
a) Desenhe o gráfico de f.
b) Determine: D(f) e I(f).
c) Desenhe o gráfico da função definida por: $y = -f(x)$.
d) Resolva a equação: $f(x) = x$.
e) Resolva a inequação: $f(x) < 1$.
f) Desenhe o gráfico da função definida por: $y = |f(x)|$.
g) Resolva a equação: $|f(x)| = 1$.

6.58) Dada a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Desenhe o gráfico da função f, definida por

$$f(x) = (x + 1) \cdot g(x - 1)$$

6.59) Uma função f, de domínio E = [−1; 1] é definida pelo gráfico abaixo:

Desenhe o gráfico da função definida por $y = |f(-x)|$.

6.6 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição

É a função de ℝ em ℝ, que associa a cada número real x o número real: $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; então, a sentença aberta que define é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Exemplos

São *quadráticas* as funções definidas pelas sentenças abertas

a) $f(x) = 2x^2 - x + 2$, onde: $a = 2$, $b = -1$ e $c = 2$
b) $f(x) = -x^2 + 4$, onde: $a = -1$, $b = 0$ e $c = 4$
c) $f(x) = x^2 - 4x$, onde: $a = 1$, $b = -4$ e $c = 0$

Gráfico na Função Quadrática

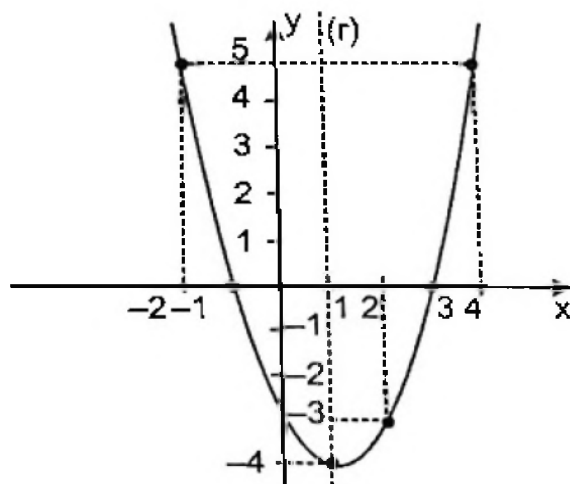
Num sistema cartesiano ortogonal xOy, o gráfico da função quadrática é uma **parábola** (a demonstração encontra-se no curso de Geometria Analítica desta coleção).

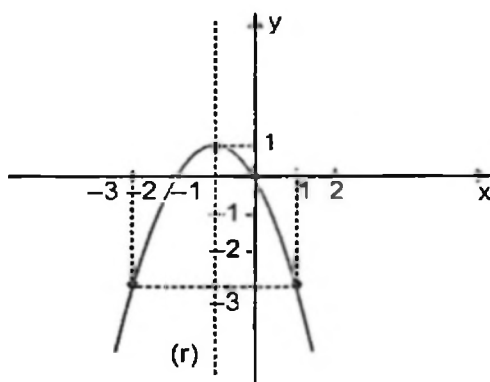
A sentença aberta que define a função quadrática: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ chama-se, então, **equação da parábola** (que é o gráfico da função).

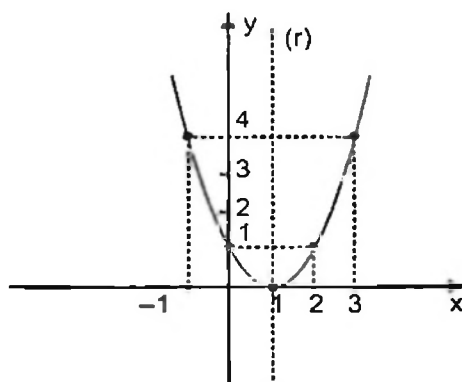
Exemplos

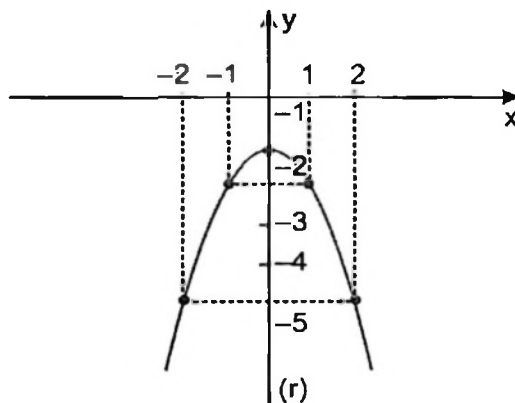
Vamos esboçar, com auxilio de uma tabela, os gráficos das *funções quadráticas* definidas pelas sentenças abertas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

b) $f(x) = -x^2 - 2x$

x	y
−3	−3
−2	0
−1	1
0	0
1	−3

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

x	y
−1	4
0	1
1	0
2	1
3	4

d) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

x	y
−2	−5
−1	−2
0	−1
1	−2
2	−5

Exercícios Resolvidos

6.60) A função definida por $f(x) = 2[(x + 1)^2 + 4]$ é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, isto é, é *quadrática*. Determine a, b e c.

Solução:

Efetuando as operações indicadas, obtemos sucessivamente:

$f(x) = 2(x^2 + 2x + 1 + 4)$

$f(x) = 2x^2 + 4x + 10$,

e daí, $a = 2$, $b = 4$ e $c = 10$.

6.61) Da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ sabe-se que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(2) = 2$. Determine a, b e c.

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \\ f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -1$$

Então: $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

Exercícios Propostos

6.62) As funções abaixo são definidas por uma sentença aberta do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, isto é, são *quadráticas*. Para cada uma delas, determine a, b e c:

a) $f(x) = -x^2 - 1$

b) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

c) $f(x) = -2x(x + 3)$

d) $f(x) = x^2$

6.63) O gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (0; 1), (1; −1) e (2; −5). Determine a, b e c.

6.64) Com auxílio de uma tabela, esboce os gráficos das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = 2x^2$

b) $f(x) = -x^2 + x$

c) $f(x) = -2(x - 3)^2$

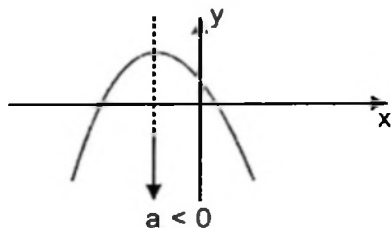
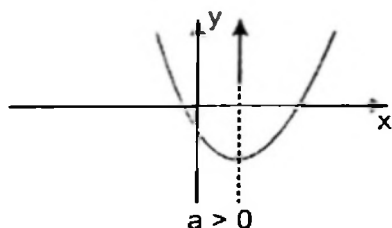
d) $f(x) = 2x^2 + 1$

Concavidade da Parábola

Um tratamento rigoroso de *concavidade* de uma curva foge dos objetivos deste trabalho. Na parábola, a concavidade pode ser "voltada para cima", como nos exemplos a e c, e "voltada para baixo", como nos exemplos b e d. *O que determina o "sentido" dessa concavidade é o sinal do coeficiente de x^2.*

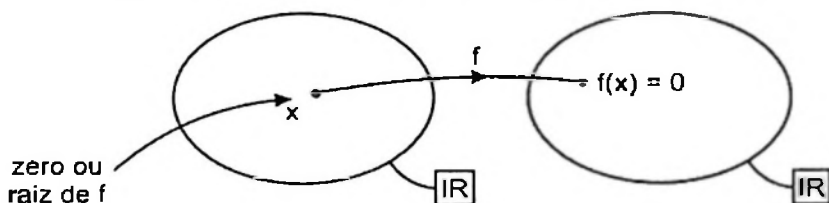
Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se $a > 0$, a concavidade da parábola está "voltada para cima".
Se $a < 0$, a concavidade da parábola está "voltada para baixo".

Zeros da Função Quadrática

Sabemos que zero da função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é todo valor de x para o qual $f(x) = 0$, isto é, todo x que tem imagem igual a zero.

No exemplo a a função quadrática possui dois *zeros*: –1 e 3.
No exemplo c a função quadrática possui um único *zero*: 1.
No exemplo d a função quadrática não possui *zeros*.

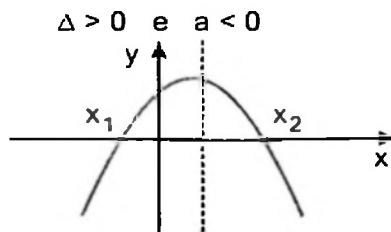
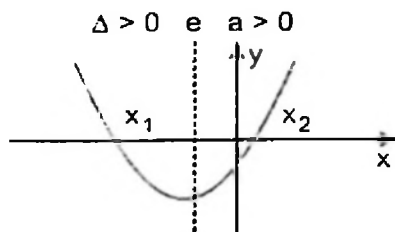
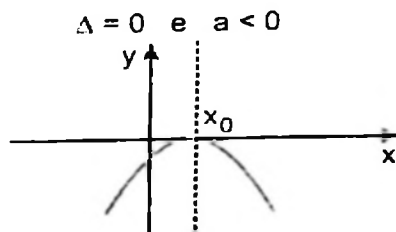
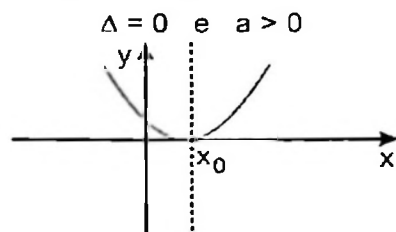
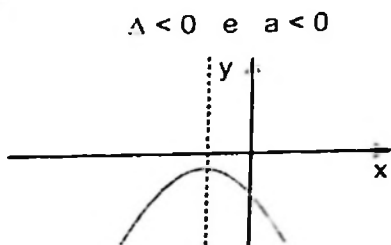
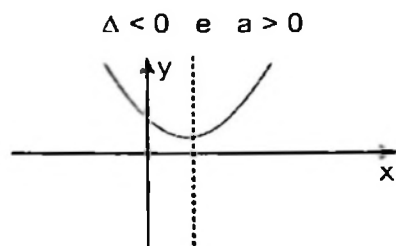
Os *zeros* da função quadrática definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$ são determinados resolvendo-se a equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

Então, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta > 0$: a função quadrática possui **dois zeros** (distintos)
$\Delta = 0$: a função quadrática possui **um único zero**
$\Delta < 0$: a função quadrática **não possui zeros** (distintos)

Observe nos exemplos a e b que, se a função quadrática possui dois zeros distintos, x_1 e x_2, o seu gráfico encontra o eixo Ox em dois pontos, cujas abscissas são, respectivamente, x_1 e x_2:

$\Delta > 0$ e $a > 0$

$\Delta > 0$ e $a < 0$

Observe no exemplo c que a função quadrática possui um único zero: x_0. A parábola tem em comum com o eixo Ox um único ponto cuja abscissa é x_0. Diz-se, nesse caso, que a parábola *tangencia* o eixo Ox.

Observe no exemplo d que a função quadrática não possui zeros. A parábola não tem ponto comum com o eixo Ox.

Exercícios Resolvidos

6.65) Determine m, $m \in \mathbb{R}$, para que o gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = (m^2 - 4)x^2 + x + m$$

tenha a concavidade "voltada para cima".

Solução:

Para que a concavidade da parábola esteja "voltada para cima" deve-se ter:

$$m^2 - 4 > 0$$

e daí: $m < -2$ ou $m > 2$

6.66) Determine m, $m \in \mathbb{R}$, para que a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$x \rightarrow 3x^2 - 6x - m$$

possua dois zeros distintos.

Solução:

Para que a função f possua dois zeros distintos deve-se ter $\Delta > 0$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m)$$

$$36 + 12\,m > 0,$$

e daí a resposta: $m > -3$

6.67) Demonstre que se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, possui dois *zeros* distintos, então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c + m(2ax + b)$ também possui dois *zeros* distintos, qualquer que seja m.

Solução:

Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, por hipótese, possui dois zeros distintos, então:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (I)$$

A sentença $f(x) = ax^2 + bx + c + m(2ax + b)$ escreve-se:

$$f(x) = ax^2 + (b + 2am)x + c + mb$$

Então,

$\Delta = (b + 2am)^2 - 4a(c + mb)$

$\Delta = b^2 + 4abm + 4a^2m^2 - 4ac - 4abm$

$\Delta = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{por hipótese} \\ (I)}} + \underbrace{4a^2m^2}_{\substack{\text{não-negativo} \\ \text{é um} \\ \text{quadrado}}}$

Daí, $\Delta > 0$ e a tese está demonstrada.

6.68) Verifique que se $a \neq 1$, a função:

$$f(x) = (a - 1)x^2 + (a + 5)x - a$$

possui dois *zeros* distintos.

Solução:

Se $a \neq 1$, a função é quadrática; devemos verificar que $\Delta > 0$.

$\Delta = (a + 5)^2 - 4(a - 1) - a$

$\Delta = a^2 + 10a + 25 - 4a + 4 - a$

$\Delta = a^2 + 5a + 29$

Ora, Δ é um *trinômio do 2º grau*, cujo *discriminante* é:

$$\Delta_1 = 5^2 - 4 \cdot 29 = -91$$

Como $\Delta_1 < 0$, o trinômio $\Delta = a^2 + 5a + 29$ tem, para todo a, o sinal do coeficiente de a^2, isto é, $\Delta > 0$ para todo a. Então, para todo a, $a \neq 1$, a função possui dois zeros distintos.

6.69) Dada a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = kx^2 + x + 1$$

determine k para que f possua um único *zero*.

Solução:

Se $k = 0$, f é função polinômio do 1º grau e possui um único zero: -1.

Se $k \neq 0$, f é função quadrática; então para que f possua um único zero deve-se ter: $\Delta = 0$

$$\Delta = 1 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Daí, para que f possua um único zero deve-se ter: $k = 0$ ou $k = \frac{1}{4}$.

Exercícios Propostos

6.70) Determine m para que o gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = (16 - m^2)x^2 + 2x - 1$$

tenha a concavidade "voltada para baixo".

6.71) Determine, se existirem, os *zeros* das funções definidas por:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$
b) $f(x) = 4x^2 + x$
c) $f(x) = x^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
g) $f(x) = -x^2 - x - 1$

6.72) Determine, se existirem, os *pontos fixos* das funções definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 5$
b) $f(x) = x^2 - x + 1$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$

6.73) Determine k para que a função quadrática definida por:

$$f(x) = x^2 + kx + 1$$

admita pelo menos um *zero*.

6.74) Determine k para que a função quadrática:

$$f(x) = kx^2 + 2x + 1$$

admita um único *zero*.

6.75) Determine k para que a função quadrática:

$$f(x) = x^2 + 3kx + 9$$

não admita *zeros*.

6.76) Discutir, segundo os valores de m, o número de pontos fixos da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = mx^2 + 1$$

6.77) Verifique que a função quadrática definida por:

$$f(x) = \frac{2}{a}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{b}$$

possui pelo menos um *zero* se a e b são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo em que h é a medida da altura relativa à hipotenusa.

6.78) Sejam A = [1; 6] e as funções de A em $\mathbb{R}$, f e g, definidas por:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

Resolva a equação: $f(x) = g(x)$.

6.79) Seja a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{a(x^2 - 1) + bx}{a(x^2 - 1) - bx},\ a \neq 0$$

a) Verifique que, quaisquer que sejam a e b, existem dois valores x, com sinais contrários, para os quais não existe f(x).

b) Resolva a equação: f(x) = 1.

Máximo e Minimo

Seja f uma função real de variável real.

O número y_M, $y_M \in I(f)$, diz-se **valor máximo de f** se e somente se:

$$y_M \geq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$

O número y_m, $y_m \in I(f)$, diz-se **valor minimo de f** se e somente se:

$$y_m \leq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$.

Teorema

Seja f uma função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$$

Quando a > 0, f admite um **valor minimo** $y_m = \dfrac{-\Delta}{4a}$ em $x = \dfrac{-b}{2a}$

Quando a < 0, f admite um **valor máximo** $y_M = \dfrac{-\Delta}{4a}$ em $x = \dfrac{-b}{2a}$

Demonstração

A sentença que define a função quadrática, escrita na *forma canônica* é:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{(I) (veja item 4.4)}$$

Observe que, para todo x real:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,$$

isto é, a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, um quadrado perfeito, é *sempre maior ou igual a zero*; o seu menor valor é zero que se dá em $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Observe também que o número $\dfrac{-\Delta}{4a^2}$ não depende de x: é constante.

Então:

1º) Se a > 0: f(x) assumirá valor minimo quando a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ assumir o seu menor valor, isto é, quando $x = \dfrac{-b}{2a}$. E, substituindo x por $\dfrac{-b}{2a}$ em (I), obtém-se: $y_m = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

2º) Se $a < 0$: $f(x)$ assumirá valor máximo quando a diferença $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ assumir o seu menor valor, isto, quando $x=\dfrac{-b}{2a}$. E, substituindo x por $\dfrac{-b}{2a}$ em (I), obtém-se: $y_M=\dfrac{-\Delta}{4a}$.

Nossa demonstração está completada.

O valor máximo de f e o valor mínimo de f denominam-se **valores extremos** ou **extremos de f**.

Então, a função quadrática definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

assume um valor extremo em $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Esse valor é mínimo se $a > 0$ e é máximo se $a < 0$. Se y_M ocorre, y_m não ocorre e inversamente.

O valor extremo é dado por $y_{eM} = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

Exemplos

a) A função quadrática definida por:

$$f(x) = 5x^2 - 50x + 39$$

admite um *valor mínimo* em $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{50}{2\cdot 5}=5$ e $y_m=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-1720}{4\cdot 5}=-86$

b) A função quadrática definida por:

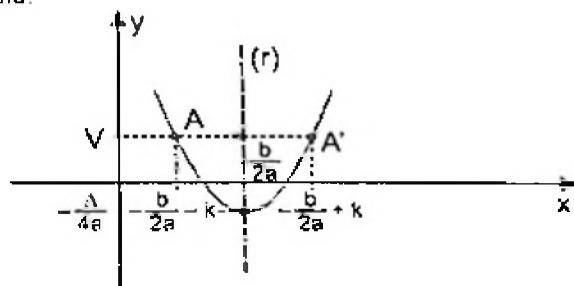
$$f(x) = -4x^2 + 40x - 73$$

admite um valor máximo em $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-40}{2\cdot(-4)}=5$ e $y_M=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-432}{4(-4)}=27$

Vértice – Eixo de Simetria

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

O gráfico da função f é uma parábola; o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ denomina-se vértice da parábola.

A reta (r), vertical, que passa por V, é um eixo de simetria da parábola; isto significa que se o ponto $A\left(-\frac{b}{2a}-k;\ y\right)$ pertence à parábola, o ponto $A'\left(-\frac{b}{2a}+k;\ y\right)$ também pertence à parábola.

Observações sobre a Gráfico da Função Quadrática

Seja a função quadrática, f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Sempre que quisermos esboçar o gráfico de f devemos buscar as seguintes informações:

1º) **Concavidade:** se $a > 0$ a concavidade está "voltada para cima" e se $a < 0$ a concavidade está "voltada para baixo".

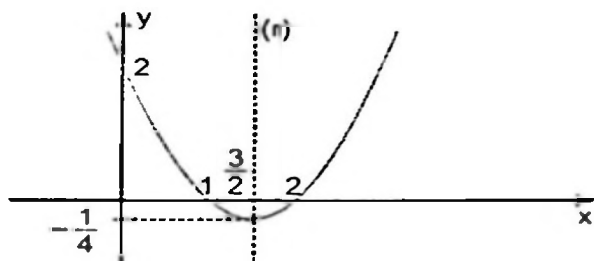
2º) **Eixo de simetria:** é a reta (r) vertical, que passa pelo ponto $\left(-\frac{b}{2a};0\right)$; o gráfico é simétrico em relação a (r).

3º) **Zeros:** resolvemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.
Se $\Delta > 0$: a parábola encontra o eixo Ox em dois pontos, $(x_1;\ 0)$ e $(x_2;\ 0)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.
Se $\Delta = 0$: a parábola "tangencia" o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{b}{2a};0\right)$; note que $-\frac{b}{2a}$ é a única raiz da equação.
Se $\Delta < 0$, a parábola não tem ponto comum com o eixo Ox.

4º) **Vértice:** é o ponto $\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$ que é "máximo" se $a < 0$ e é "mínimo" se $a > 0$.

5º) O ponto $(0;\ c)$ é o ponto de encontro da parábola com o eixo Oy.

Exemplos

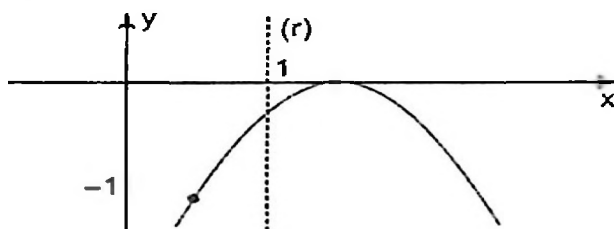
a) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
Concavidade: $a = 1 > 0$; a concavidade está "voltada para cima".
Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por: $\left(\frac{-b}{2a};0\right) = \left(\frac{3}{2};0\right)$.
Zeros: resolvendo $x^2 - 3x + 2 = 0$, encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$; a parábola encontra o eixo Ox nos pontos (1; 0) e (2; 0).
Vértice: $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{4}\right)$
A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; 2).

b) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Concavidade: $a = -1 < 0$; a concavidade está "voltada para baixo".

Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por: $\left(\frac{-b}{2a}; 0\right) = (1; 0)$

Zeros: resolvendo $-x^2 + 2x - 1 = 0$, encontramos $x = 1$; a parábola "tangencia" o eixo Ox no ponto (1; 0).

Vértice: $\frac{-b}{2a} = 1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow V(1; 0)$

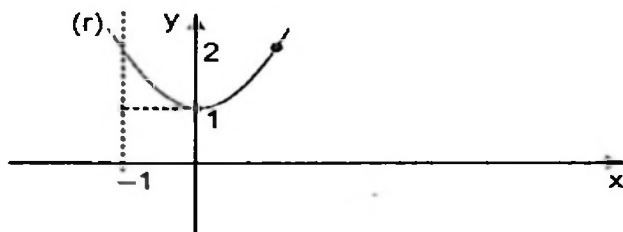
A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; −1).

c) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Concavidade: $a = 1 > 0$; a concavidade está "voltada para cima".

Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por $\left(\frac{-b}{2a}; 0\right) = (-1; 0)$.

Zeros: a equação $x^2 + 2x + 2 = 0$ possui $\Delta < 0$; função não apresenta zeros e a parábola não encontra o eixo Ox.

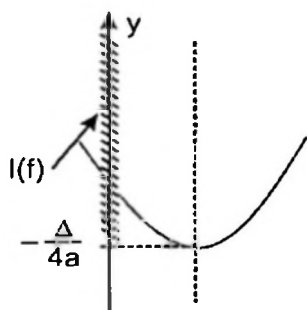
Vértice: $\frac{-b}{2a} = -1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4} = 1 \Rightarrow V(-1; 1)$

A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; 2).

Conjunto-Imagem

Seja f a função quadrática definida por:

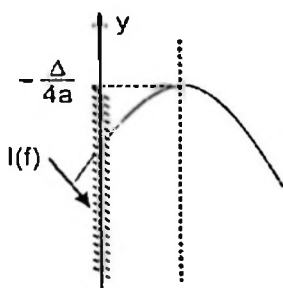
$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Para determinarmos I(f) há duas situações que devem ser consideradas:

1) **a > 0**: a concavidade da parábola está "voltada para cima"; a projeção do gráfico sobre o eixo Oy nos dá:

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Note que a posição do eixo Ox é irrelevante.

2) **a < 0**: a concavidade da parábola está "voltada para baixo"; a projeção do gráfico sobre o eixo Oy nos dá:

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplos

a) Seja a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. A concavidade da parábola está "voltada para cima" e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{8}$.

Então:

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{8} \right\} = \left[-\frac{1}{8}; +\infty \right[$$

b) Seja a função quadrática definida por: $f(x) = x^2 - 1$. A concavidade da parábola está "voltada para baixo" e $\frac{-\Delta}{4a} = -1$.

Então:

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1\} =]-\infty; -1]$$

Um Resumo Gráfico

Para a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

podemos obter as situações seguintes para o gráfico e seu conjunto-imagem:

$\Delta > 0;\ a > 0$

$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$

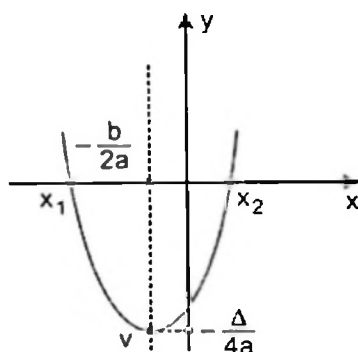
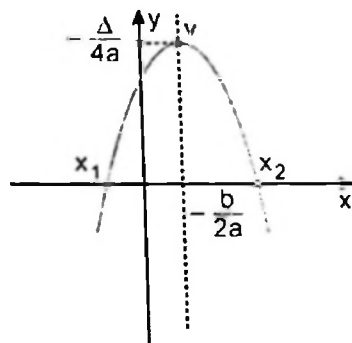
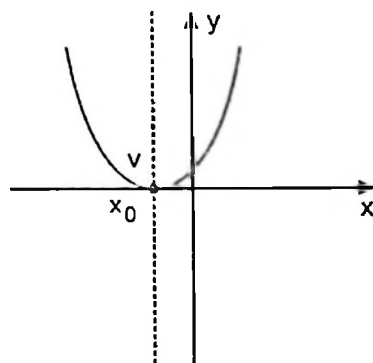
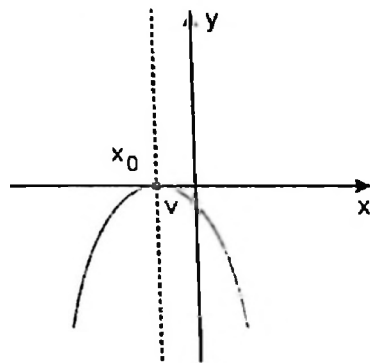
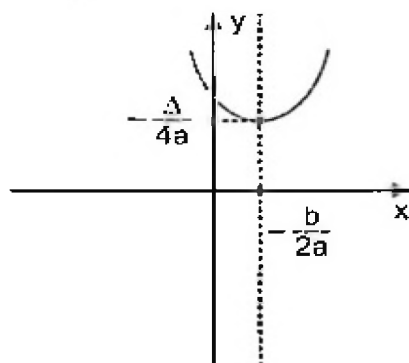
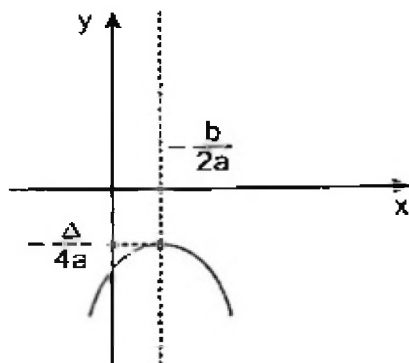
$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$

$\Delta = 0;\ a > 0$

$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq 0\}$

$\Delta = 0;\ a < 0$

$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq 0\}$

$$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$$

$$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$$

Exercicios Resolvidos

6.80) Seja a função quadrática, f, definida por:

$$f(x) = -x^2 + mx + 1$$

Determine m para que f apresente um valor máximo igual a 5.

Solução:

Como a = −1 < 0, efetivamente f admite um valor máximo, y_M:

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(m^2+4)}{-4} = 5 \Rightarrow m^2 + 4 = 20 \Rightarrow m^2 = 16$$

E, então, m = 4 ou m = −4

6.81) Uma função quadrática é definida por:

$$f(x) = mx^2 + 2x + 1,\ m \neq 0$$

Determine m para que ela admita um mínimo em x = −1.
Qual é esse valor mínimo?

Solução:

Para que a função admita um valor mínimo deve-se ter m > 0 (a concavidade da parábola deve estar "voltada para cima").

Esse valor mínimo dá-se em: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2m} = -1$.

Dai, −2m = −2 e então m = 1 (aceitável, pois m > 0).

6.82) A soma de dois números reais positivos é 12. Qual é o maior valor que o produto desses dois números pode assumir?

Solução:

Sejam x e 12 − x os números; se y é o produto deles:

$$y = x\,(12 - x)$$
$$y = -x^2 + 12x$$

A sentença acima define uma função quadrática na qual $a = -1 < 0$; então, ela apresenta um máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-4} = 36$$

O máximo valor do produto y é $y_M = 36$; ele se dá em:

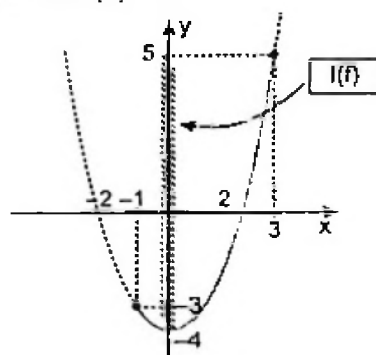
$$x = \frac{-b}{2a} = 6.$$

6.83) Seja o intervalo $A = [-1; 3]$ e a função de A em ℝ definida por:

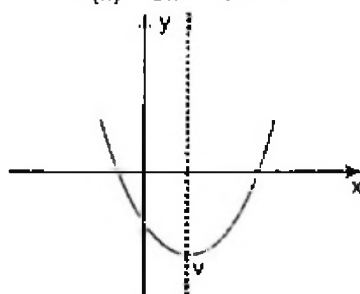
$$f(x) = x^2 - 4$$

Determine I(f)

Solução:

A sentença $f(x) = x^2 - 4$ é a equação da parábola da figura abaixo; apenas um "arco" dessa parábola é o gráfico da função dada: aquele para o qual $x \in [-1; 3]$.
Observe que $f(-1) = -3$ e $f(3) = 5$.

A projeção do gráfico da função sobre o eixo Oy nos dá $I(f) = [-4; 5]$

6.84) O gráfico da função quadrática definida pela fórmula:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é a parábola da figura acima. Determine os sinais de a, b, c e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solução:

A parábola tem a concavidade "voltada para cima", então $a > 0$.
O vértice da parábola é um ponto do IV quadrante; sua abscissa é positiva:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a>0} -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

O ponto (0, c) de encontro da parábola com o eixo Oy está "abaixo" da origem; então $c < 0$.
A parábola encontra o eixo Ox em dois pontos, isto é, a função possui dois *zeros*: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

6.85) **A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1, 6) e o seu vértice é o ponto (−1; 2). Determine a, b e c.**

Solução:

O ponto (1; 6) pertence à parábola; então, sua equação fica satisfeita se fizermos a substituição $x = 1$ e $y = 6$.

$$a + b + c = 6 \text{ (I)}$$

$$V(-1,2) \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -1 \text{ e } \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 2, \text{ e daí:}$$

$b = 2a$ (II)

$-b^2 + 4ac = 8a$ (III)

Substituindo (II) em (I), obtém-se:

$$3a + c = 6$$

e daí: $c = 6 - 3a$ (IV)

Substituindo (II) e (IV) em (III), obtemos:

$$-4a^2 + 4a(6 - 3a) = 8a$$

$$-16a^2 + 16a = 0$$

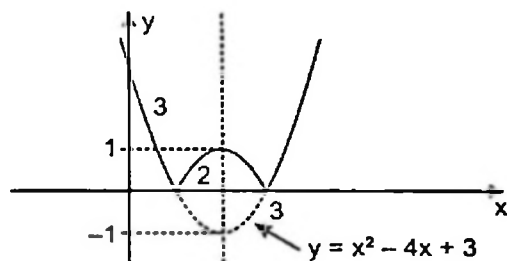
e daí: $-16a\,(a - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{(rejeitada pois } a \neq 0) \\ \boxed{a = 1} \end{cases}$

Para $a = 1$, obtém-se em (II) e (IV): $b = 2$ e $c = 3$.

6.86) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

Solução:

Inicialmente desenhamos a parábola de equação: $y = x^2 - 4x + 3$ e em seguida, para obtermos o gráfico de f, fazemos a "parte" que está "abaixo" do eixo Ox sofrer uma *reflexão* em torno do eixo Ox:

6.87) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = (|x| - 1) \cdot (x + 2)$$

Solução:

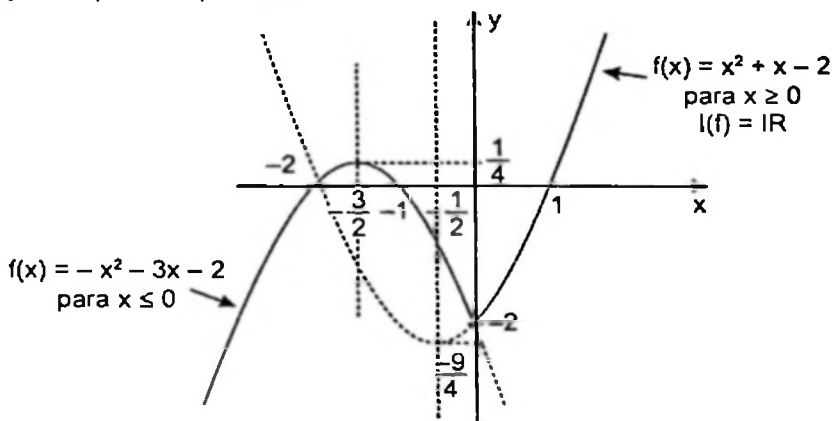
A definição de *módulo* de um número real nos dá:

Se $x \geq 0$: $|x| = x$ e $f(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$

Se $x \leq 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = (-x - 1)(x + 2) = -x^2 - 3x - 2$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

Para obtermos o gráfico de f, desenhamos as parábolas de equações $y = x^2 + x - 2$ e $y = -x^2 - 3x - 2$; da primeira tomamos o "arco" constituido pelos pontos para os quais $x \geq 0$, e da segunda, o "arco" constituido pelos pontos para os quais $x \leq 0$:

6.88) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$$

Solução:

Observe que o domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{1; -1\}$

A definição de módulo de um número real nos dá:

Se $x^2 - 1 > 0$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ e

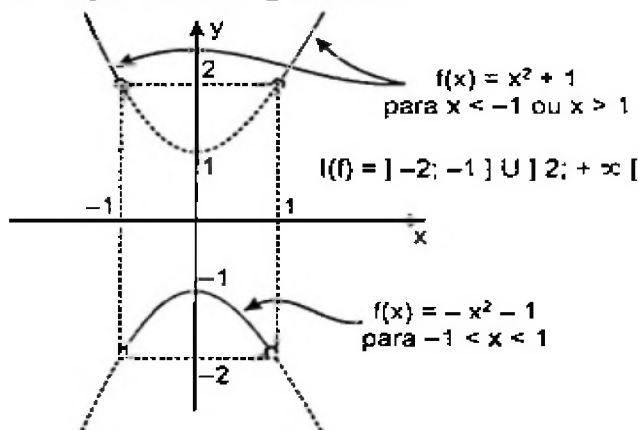
$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2 + 1$$

Se $x^2 - 1 < 0$, isto é, $-1 < x < 1$, $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ e

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{-(x^2 - 1)} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{-(x^2-1)} = -(x^2 + 1) = -x^2 - 1$$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -x^2 - 1, \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

O gráfico da função f está na figura abaixo:

Exercícios Propostos

6.89) Para cada uma das funções definidas abaixo, determine os *valores extremos*:

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

b) $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$

c) $f(x) = 2x^2 + 20x + 17$

d) $f(x) = 2x^2 + 1$

e) $f(x) = -x^2$

6.90) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = x^2 + 2x + m$$

Determine m para que a função admita um valor mínimo igual a 3.

6.91) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = mx^2 + 2x + 1,\ m \neq 0$$

Determine m para que a função admita um valor máximo em x = 1.

6.92) Seja a função f, quadrática, definida pela sentença:

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (m^3 - 1)x + 2$$

Determine m para que f admita um valor máximo igual a f(−2).

6.93) A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (2; 3) e (−1; 6). O seu vértice tem abscissa x = 1. Determine a, b e c.

6.94) O gráfico de $y = x^2 + bx + c$ tem um "mínimo" no ponto (1; 2). Determine b e c.

6.95) Ache a interseção das parábolas de equações:

$$y = x^2 + x - 2$$
$$y = -x^2 + 3x + 2$$

6.96) A soma de dois números reais positivos é A. Qual é o maior valor que o produto desses dois números pode assumir?

6.97) A soma de dois números reais é 8. Determine-os sabendo-se que a soma de seus cubos é mínima.

6.98) De todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que possui maior área. Demonstre!

6.99) Uma fábrica de televisores determina que se devem produzir x unidades em uma semana. O custo dessa produção (em reais) é dado por:

$$C(x) = 6x^2 + 1100x + 1000$$

O dinheiro recebido na venda das x unidades (em reais) é dado por:

$$M(x) = 3x^2 + 1700x$$

Quantos televisores devem ser fabricados, em uma semana, para que o lucro seja máximo?

6.100) Seja a equação do 2º grau:

$$x^2 - mx + m - 2 = 0$$

Determine m para que a soma dos quadrados de suas raízes seja mínima.

6.101) Esboçar os gráficos das funções quadráticas definidas por:

a) $f(x) = -x^2 - 1$
b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$
d) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

6.102) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |x| - 2$$

6.103) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |x - 2| + 3$$

6.104) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = |4x^2 - 1| - 3x$$

6.105) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = |x^2 - 1| + x$$

Deduza o número de soluções da equação $|x^2 - 1| + x + k = 0$, segundo os valores de k.

6.106) Desenhe o gráfico da função:

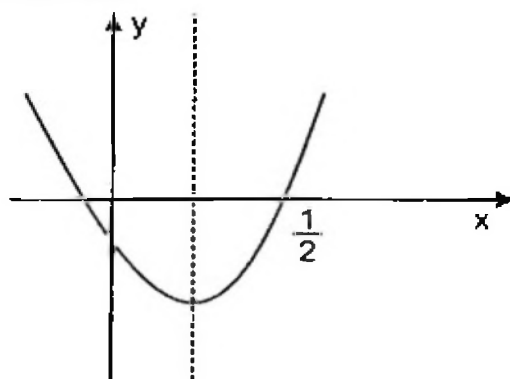
$$f(x) = x + x\sqrt{(x-1)^2}$$

6.107) Desenhe o gráfico da função:

$$f(x) = \frac{1}{2}\{x^2 - 1 - |x^2 - 1|\}$$

6.108) O gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 - bx + c$$

é a parábola da figura ao lado. Dar os sinais de: a, b, c, $b^2 - 4ac$, $a - b + c$, $a + b + c$, $a - 2b + 4c$.

6.109) Seja A = [−1; 1] e considere a função de A em ℝ definida por $f(x) = -x^2 + 4$. Esboce o gráfico da função e determine o seu conjunto-imagem.

6.110) Dê o conjunto-imagem de cada uma das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = -3x^2 + x + 2$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = 2x^2 + 8$

f) $f(x) = -x^2$

6.111) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = -x^2 + x + 4m$$

Determine m para que $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$.

6.112) Ao lado estão os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas:

(1) $y = ax^2 + 2bx + c$

(2) $y = \ell x^2 + 2mx + m$

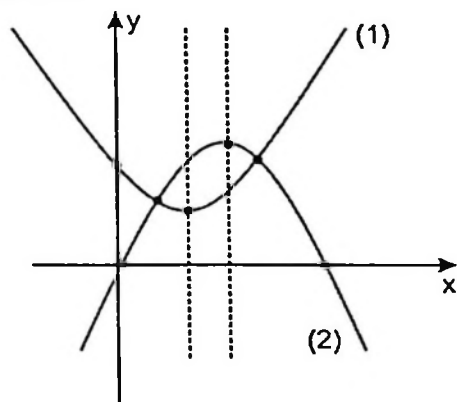
Dar os sinais de:

a) a

b) ℓ

c) $b^2 - ac$

d) $m^2 - \ell n$

e) $\ell b^2 - 2mab + na^2$

6.113) Determine m para que o domínio da função definida por:

$$f(x) = (x^2 + mx + 1)^{\frac{-1}{2}}$$

seja $\mathbb{R}$.

6.7 – POSIÇÃO DE UM NÚMERO EM RELAÇÃO ÀS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2° GRAU

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0,$$

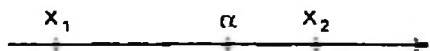
e consideremos a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, associada à função f.

Sejam x_1 e x_2, $x_1 \leq x_2$, as *raízes* dessa equação; note que x_1 e x_2 são os *zeros* de f.

Problema

Dado um número real α queremos verificar se:

1°) $\alpha < x_1 \leq x_2$, isto é, se α está "à esquerda" de x_1:

ou 2°) $x_1 < \alpha < x_2$, isto é, se α está "entre" as raízes:

ou 3º) $x_1 \leq x_2 < \alpha$, isto é, se α está "à direita" de x_2:

A solução do problema baseia-se nos dois teoremas que seguem:

Teorema

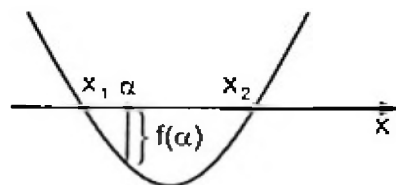
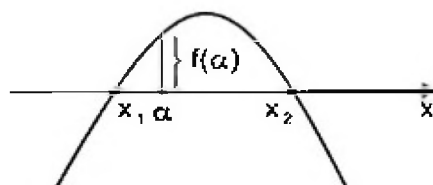
Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, então f admite dois zeros distintos, $x_1 < x_2$, e $x_1 < \alpha < x_2$.

Demonstração

Se fosse $\Delta \leq 0$ teríamos $f(\alpha) = 0$ ou $f(\alpha)$ com mesmo sinal de a, isto é, $af(\alpha) \geq 0$, o que contraria a hipótese $af(\alpha) < 0$; então $\Delta > 0$ e f admite dois zeros x_1 e x_2, distintos. Admitamos $x_1 < x_2$.

Se α estivesse "à esquerda" de x_1 ou "à direita" de x_2, $f(\alpha)$ teria o mesmo sinal de a, isto é, $af(\alpha) > 0$; e também, se α fosse um zero de f teríamos $af(\alpha) = 0$. Ora, as situações acima contrariam a hipótese feita e devem ser rejeitadas. Então, por exclusão, temos:

$$x_1 < \alpha < x_2$$

Veja as ilustrações:

Teorema

Se $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, então f admite os zeros x_1 e x_2, $x_1 \leq x_2$, $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Demonstração

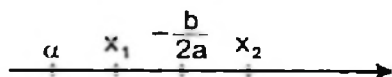
Supondo $\Delta > 0$, não podemos ter $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, pois viria $af(\alpha) \leq 0$, o que contradiz a hipótese $af(\alpha) > 0$.

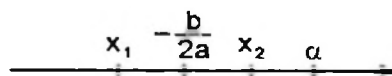
Supondo $\Delta = 0$, não podemos ter $\alpha = x_1 = x_2$, pois viria $af(\alpha) = 0$, o que contradiz a hipótese $af(\alpha) > 0$.

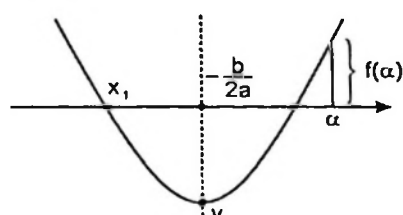
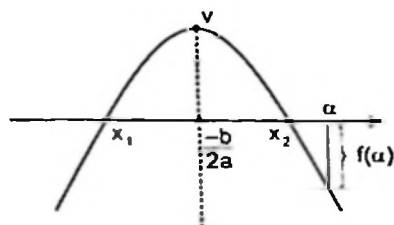
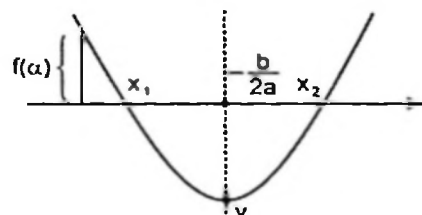
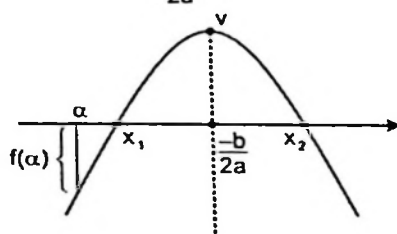
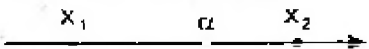
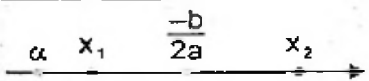
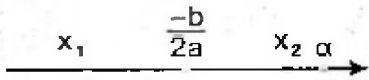
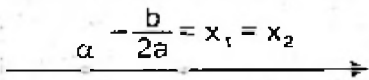
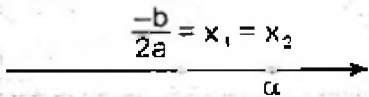
Então, por exclusão, temos $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Observe que se $\Delta > 0$ e $af(\alpha) > 0$, α está "à esquerda" de x_1 ou "à direita" de x_2. Para decidirmos qual das duas situações se verifica, devemos comparar α com um número que esteja entre os *zeros* de f. Geralmente, o número utilizado é $\frac{-b}{2a}$ (abscissa do vértice da parábola, ou ainda, a semi-soma dos *zeros* de f):

Se $\alpha < \frac{-b}{2a}$: α está "à esquerda" de x_1

$$\alpha \quad x_1 \quad -\frac{b}{2a} \quad x_2$$

Se $\alpha > \frac{-b}{2a}$: α está "à direita" de x_2

$$x_1 \quad -\frac{b}{2a} \quad x_2 \quad \alpha$$

Observe também que se $\Delta = 0$ e $af(\alpha) > 0$, para sabermos se α está "à esquerda" de $x_1 = x_2$ ou "à direita" de $x_2 = x_1$, compara-se α diretamente com $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Veja as ilustrações:

Resumo

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$$

Seja α um número real que deve ser comparado aos *zeros* de f ou às *raízes* da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$; sejam x_1 e x_2, $x_1 < x_2$ essas raízes. Então:

Condições	*Posição do número a*
$af(\alpha) = 0$	α é um *zero* de f
$af(\alpha) < 0$	x_1 α x_2 →
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\alpha < \frac{-b}{2a}$	α x_1 $\frac{-b}{2a}$ x_2 →
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\frac{-b}{2a} < \alpha$	x_1 $\frac{-b}{2a}$ x_2 α →
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta = 0$ e $\alpha < \frac{-b}{2a}$	α $-\frac{b}{2a} = x_1 = x_2$ →
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta = 0$ e $\frac{-b}{2a} < \alpha$	$\frac{-b}{2a} = x_1 = x_2$ α →

Exemplos

a) Comparar o número $\alpha = 1$ com as raízes da equação:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

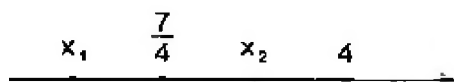
Tem-se $a = 1$ e $f(\alpha) = f(1) = -1$ e daí $af(\alpha) < 0$; então, a equação possui duas raízes distintas e $\alpha = 1$ está "entre" essas raízes; também se diz que "$\alpha = 1$ é *interno* ao intervalo das raízes":

x_1 1 x_2 →

b) Comparar o número $\alpha = 4$ com os zeros da função quadrática definida por:

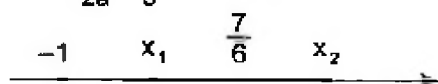
$$f(x)\ 2x^2 - 7x + 1$$

Tem-se $a = 2$ e $f(\alpha) = f(4) = 5$ e daí $af(\alpha) > 0$; $\Delta = 41$; então a função admite dois zeros distintos e "$\alpha = 4$ é *externo* ao intervalo dos zeros"; como $\frac{-b}{2a} = \frac{7}{4} < \alpha = 4$, $\alpha = 4$ está "à direita do intervalo":

x_1 $\frac{7}{4}$ x_2 4 →

c) Comparar o número $\alpha = -1$ com as raízes da equação:

$$3x^2 - 7x - 1 = 0.$$

Tem-se $a = 3$ e $f(\alpha) = f(-1) = 9$ e daí $af(\alpha) > 0$; $\Delta = 61 > 0$; então a equação admite duas raízes distintas e "$\alpha = -1$ é *externo* ao intervalo das raízes"; como $\frac{-b}{2a} = \frac{7}{6} > \alpha = -1$, $\alpha = -1$ está "à esquerda do intervalo":

$$-1 \qquad x_1 \qquad \frac{7}{6} \qquad x_2$$

Exercícios Resolvidos

6.114) Determine o parâmetro m para que a equação:

$$(2m - 1)x^2 - (3m + 2)x + m + 3 = 0$$

admita duas raízes x_1 e x_2, tais que $x_1 < 2 < x_2$.

Solução:

A condição (única) é: $af(\alpha) < 0$.
Temos:

$$a = 2m - 1$$

$$f(\alpha) = f(2) = (2m - 1)2^2 - (3m + 2)2 + m + 3 = 3m - 5$$

Então:

$$(2m - 1)(3m - 5) < 0$$

e daí a resposta $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{3}$.

6.115) Seja a função f definida por:

$$f(x) = (2m + 1)x^2 - 4x - 2m + 4$$

Determine o número real m para que f admita os zeros x_1 e x_2 tais que $x_1 \leq x_2 < 1$.

Solução:

As condições que se devem impor são traduzidas pelo sistema de inequações simultâneas:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{(I)} \\ af(\alpha) > 0 & \text{(II)} \\ \frac{-b}{2a} < 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

O sistema acima escreve-se:

$$\begin{cases} m(2m - 3) > 0 & \text{(I)} \\ 2m + 1 > 0 & \text{(II)} \\ \frac{1 - 2m}{2m + 1} < 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Então, a resposta é $\frac{-1}{2} < m < 0$.

6.116) Mostre, sem formar o *discriminante*, que a equação:

$$(x - p)(x - q) - r^2 = 0,\ r \neq 0$$

admite duas raizes distintas.
Compare os números p e q com as raízes da equação.

Solução:

Exercicios Propostos

6.117) Comparar o número α com as raízes das equações seguintes:

a) $x^2 - 7x - 4 = 0$ e $\alpha = 1$
b) $2x^2 - 3x - 25 = 0$ e $\alpha = -3$
c) $x^2 - 6x + 4 = 0$ e $\alpha = 6$
d) $3x^2 - 26x + 54 = 0$ e $\alpha = 3$

6.118) Determine o número real m para que o número 2 esteja "entre" as raizes da equação $mx^2 - 2(m + 1)x + m = 0$, $m \neq 0$.

6.119) Seja a equação:

$$x^2 - 6mx + (2 - 2m + 9m^2) = 0$$

Determine m para que suas raízes x_1 e x_2 satisfaçam á condição: $3 < x_1 \leq x_2$.

6.120) Seja a equação:

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

Determine m para que suas raízes x_1 e x_2 satisfaçam á condição: $0 < x_1 \leq x_2 < 3$.

6.121) Determine o parâmetro a para que as raízes da equação:

$$x^2 + x + a = 0$$

Sejam maiores do que a.

6.122) Compare os números –1, 1, 2 e 3 com as raízes da equação:

$$(x - 1)(x - 3) - m(x + 1)(x - 2) = 0,\ m \neq 1$$

6.123) Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = (x - p)(x - q) + (x - q)(x - r) + (x - r)(x - p)$$

com $p < q < r$.
Deduza, sem formar o *discriminante*, que a equação $f(x) = 0$ admite duas raízes distintas. Compare os números p, q e r com as raízes da equação.

6.124) Sejam a função quadrática f definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

e os números reais α e β tais que $\alpha < \beta$.
Verifique que se $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, então f admite dois zeros distintos e um e somente um dos números α e β pertence ao intervalo das raízes.

6.125) Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = (3a - 2)x^2 + 2ax + 3a.$$

Determine a para que a equação $f(x) = 0$ admita uma raiz e uma só "entre" -1 e 0.
(Sugestão: exercício anterior.)

6.8 – OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

1. Função Definida pela Sentença Aberta $f(x) = x^3$

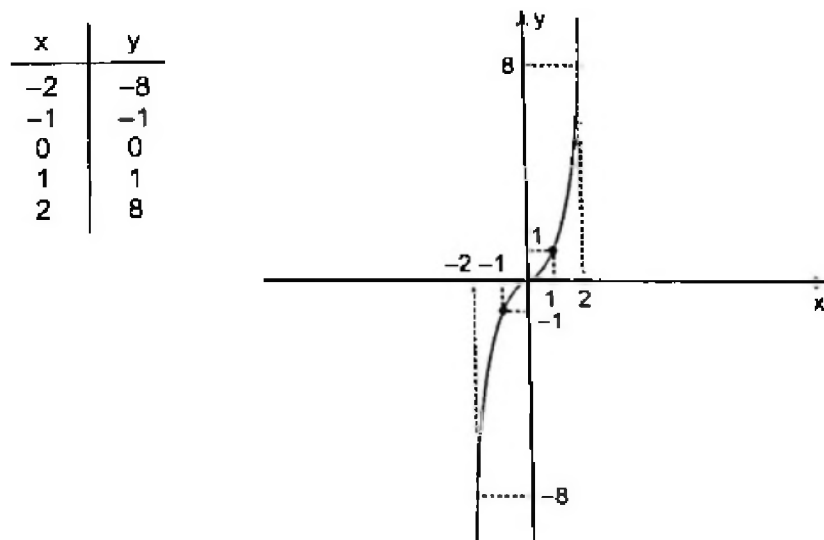
Consideremos a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada nú… número x^3:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3$$

A função f é *crescente* em $\mathbb{R}$, pois para todo real x_1, e todo real x_2, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

O gráfico de f é mostrado na figura:

x	y
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8

A projeção do gráfico de f sobre o eixo Oy nos dá: $I(f) = \mathbb{R}$.

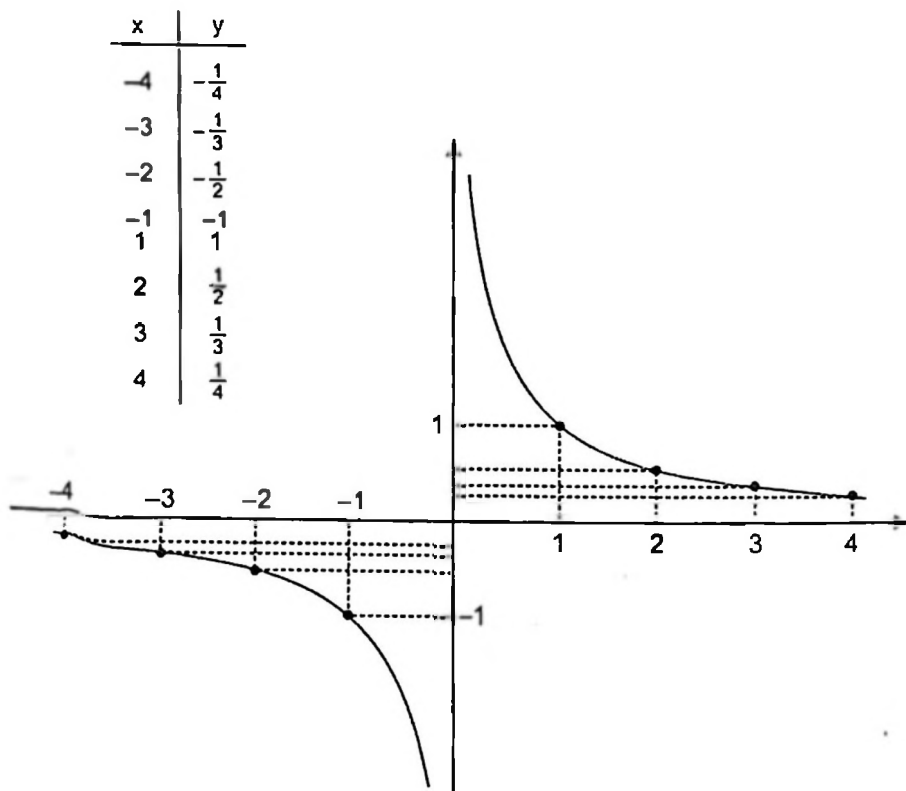
2. Função Definida pela Sentença Aberta $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Consideremos a função d, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x, $x \neq 0$, o número $\dfrac{1}{x}$:

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

A função é *decrescente* em $\mathbb{R}_-^*$, e também é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

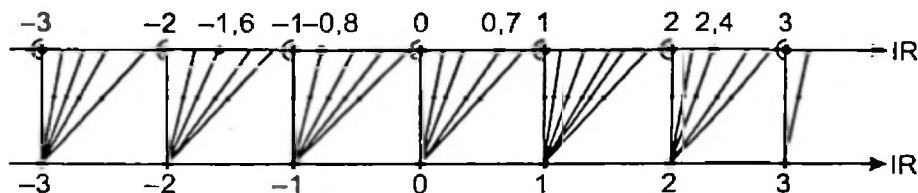
O gráfico de f é uma *hipérbole equilátera* (ver o curso de Geometria Analítica desta coleção):

x	y
−4	$-\frac{1}{4}$
−3	$-\frac{1}{3}$
−2	$-\frac{1}{2}$
−1	−1
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

A projeção do gráfico de f sobre Oy nos dá: $I(f) = \mathbb{R}^*$.

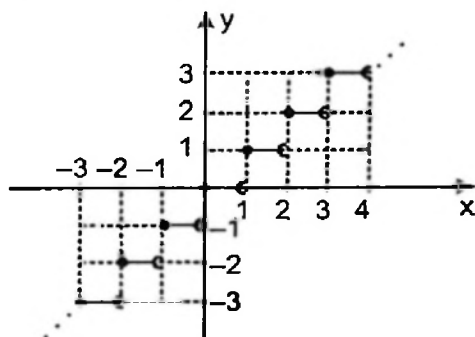
3. Função Maior Inteiro

É a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número [x] que é o *maior inteiro que não supera* x:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = [x]$$

A figura abaixo ilustra qual é a correspondência definida pela função f.

Note por exemplo que:

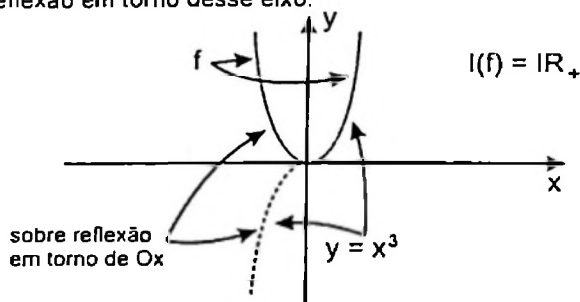
$f(2,4) = [2,4] = 2$
$f(0,7) = [0,7] = 0$
$f(2) = [2] = 2$
$f(-0,8) = [-0,8] = -1$
$f(-1,6) = [-1,6] = -2$

O gráfico da função f é o conjunto de segmentos como mostra a figura:

$-3 \leq x < -2$: $f(x) = -3$
$-2 \leq x < -1$: $f(x) = -2$
$-1 \leq x < 0$: $f(x) = -1$
$0 \leq x < 1$: $f(x) = 0$
$1 \leq x < 2$: $f(x) = 1$
$2 \leq x < 3$: $f(x) = 2$
$3 \leq x < 4$: $f(x) = 3$
⋮ ⋮

Observe que $I(f) = \mathbb{Z}$.

6.126) Desenhe o gráfico da função f definida por $f(x) = |x^3|$.

Solução:

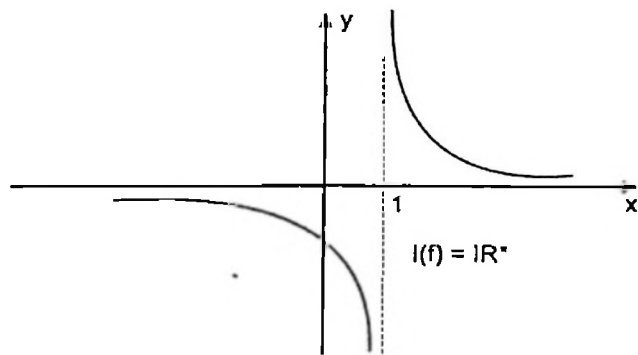
Para obtermos o gráfico da função f, desenhamos o gráfico da função definida por $y = x^3$ e aquela parte que se situa "abaixo" do eixo Ox sofre uma reflexão em torno desse eixo:

6.127) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

a) Determine D(f).
b) Desenhe o gráfico de f e deduza I(f).

Solução:

a) Devemos ter $x - 1 \neq 0$, isto é, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Para se obter o gráfico de f, desenhamos o gráfico da função g definida por $g(x) = \frac{1}{x}$; e, como $f(x) = g(x - 1)$, "deslocamos" o gráfico de g para a direita de 1 unidade:

6.128) Seja a função f, de ℝ em ℝ, definida por:

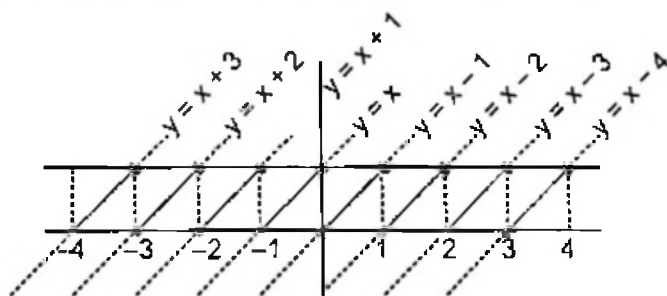
$$f(x) = x - [x]$$

Tal função denomina-se função mantissa.
Desenhe o gráfico de f e deduza o seu conjunto-imagem.

Solução:

$0 \leq x < 1$: $[x] = 0$ e $f(x) = x$
$1 \leq x < 2$: $[x] = 1$ e $f(x) = x - 1$
$2 \leq x < 3$: $[x] = 2$ e $f(x) = x - 2$
⋮ ⋮ ⋮

$-1 \leq x < 0$: $[x] = -1$ e $f(x) = x + 1$
$-2 \leq x < -1$: $[x] = -2$ e $f(x) = x + 2$
$-3 \leq x < -2$: $[x] = -3$ e $f(x) = x + 3$
⋮ ⋮ ⋮

A projeção do gráfico de f sobre Oy nos dá: $I(f) = [0; 1[$

Exercícios Propostos

6.129) Seja a função f definida por:

$$f(x) = ax^3,\ a \neq 0$$

Determine a para que f seja:

a) crescente em ℝ

b) decrescente em ℝ

6.130) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = |(x + 2)^3| + 1$$

Determine I(f).

6.131) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = -x^2 \cdot |x|$$

6.132) Seja a função f, de ℝ* em ℝ, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Demonstre que f é decrescente em $\mathbb{R}^*_-$

b) Demonstre que f é decrescente em $\mathbb{R}^*_+$

c) Determine os *pontos fixos* de f.

6.133) Com auxílio de uma tabela, esboce o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

6.134) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

Nos exercícios de 6.135 a 6.139 desenhe os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas.

6.135) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$

6.136) $f(x) = |[x]|$

6.137) $f(x) = [x]^2$

6.138) $f(x) = x + [x]$

6.139) $f(x) = (-1)^{[x]} \cdot x$

6.140) Resolva as equações:
a) $[x] = 3$
b) $4\,[x]^2 - 36\,[x] + 45 = 0$

6.141) Resolva a equação: $|x| = [x]$

6.142) Determine os pontos fixos da função maior inteiro.

III.1) Seja $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq n,\ n \in \mathbb{Z}_+^*\}$. Forma-se S^2. Qual é a soma dos produtos obtidos multiplicando-se as coordenadas de cada par de S^2?

III.2) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de equivalência definida sobre A. Seja a um elemento qualquer de A. O subconjunto de A:

$$C_a = \{x \mid x \in A \wedge x\, \mathfrak{R}\, a\}$$

chama-se *classe de equivalência de a com relação à equivalência* $\mathfrak{R}$.

Seja a relação $\mathfrak{R}$, sobre $\mathbb{Z}$, definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \textit{ é divisível por } 3\}.$$

Verifique que $\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência.

Qual é a classe de equivalência de zero com relação à equivalência $\mathfrak{R}$?

III.3) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in N^2 \mid x + 3y = 12\}$$

a) Determine $\mathfrak{R}$ por enumeração dos pares ordenados que a constituem.
b) Dê $D(\mathfrak{R})$ e $I(\mathfrak{R})$.
c) Determine $\mathfrak{R}^{-1}$.

III.4) Determine o domínio de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{|x|-x}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{|x-1|-1}$

III.5) Desenhe o gráfico da função real de variável real definida por:

$$f(x) = x - 2 + \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$$

III.6) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |2x - 1|$$

III.7) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)(3x - 2) + a$$

Sabe-se que $f(x) > 0$, se $x > \dfrac{1}{2}$ e que $f(x) < 0$, se $x_0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Determine a e x_0.

III.8) As raízes da equação:

$$6(m + 3)x^2 - 3(m - 1)x + 4m = 0$$

são x_1 e x_2. Determine m para que $x_1 < 3 < x_2$.

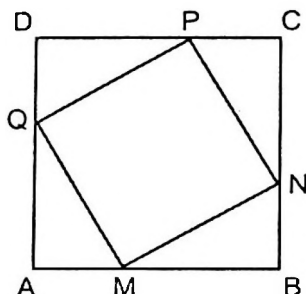
III.9) Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = m(x-1)(x-2) + 2x - 3,\ m \neq 0$$

Determine f(1) e f(2). Concluir que a equação f(x) = 0 admite raízes distintas qualquer que seja o parâmetro m. Compare os números 1 e 2 com as raizes da equação f(x) = 0.

III.10) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)\cdot|x|}$$

III.11) Dá-se o quadrado ABCD de lado Q (veja a figura). Dos vértices traçam-se os segmentos iguais $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DQ}$ e os pontos M, N, P e Q unem-se formando um quadrado. Determinar med($\overline{AM}$) para que seja mínima a área do quadrado MNPQ.

[illegible]) Condição para que o domínio da função definida por:

$$f(x) = [px^2 + 2\sqrt{(a+2)\cdot p}\cdot x + 2]^{\frac{1}{2}}$$

seja $\mathbb{R}$.

III.13) Considere a função definida por:

$$f(x) = x \cdot [x]$$

Desenhe o seu gráfico para $-1 \leq x < 2$.

III.14) Seja a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

Calcule f(1) + f(2) + ... + f(100).

III.15) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{x}$$

Determine I(f).

PARTE IV

Capítulo 7 – **Equações e inequações irracionais**

Equações e inequações irracionais

7.1 – EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Equações irracionais são aquelas que apresentam variável sob radical.

Exemplos

a) A equação $\sqrt{x} - 3 = 2x$ é irracional.

b) A equação $\sqrt[3]{2x+1} + 1 = x$ é irracional.

c) A equação $(x - 2)^{1/2} - 2x + 1 = 0$ é irracional, pois $(x - 2)^{1/2} = \sqrt{x - 2}$

Antes de passar à resolução das equações irracionais, devemos lembrar alguns fatos importantes:

1º) Quando escrevemos $\sqrt[2]{9}$ estamos nos referindo ao número 3, isto é, $\sqrt[2]{9} = 3$ e *não* podemos escrever $\sqrt[2]{9} = -3$. De modo geral é o que ocorre com *radicais de índice par*.

Exemplos

a) $\sqrt[4]{16} = 2$

b) É falso que $\sqrt[4]{16} = -2$

Quando trabalhamos com radicais de índice ímpar, esse problem aparece.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

2º) No conjunto dos números reais, *não* existe raiz de **índice par** de **negativo**.

Exemplos

a) No conjunto dos números reais não existe $\sqrt{-4}$

b) No conjunto dos números reais não existe $\sqrt[4]{-81}$

c) $\sqrt[4]{81} = 3$

d) $\sqrt{0} = 0$

e) $\sqrt[4]{0} = 0$

3º) Quando a raiz é de índice ímpar, o radicando pode ser positivo, negativo ou nulo; em qualquer caso a raiz existirá e será um número real.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$

c) $\sqrt[3]{125} = 5$

d) $\sqrt[3]{0} = 0$

Vamos então ressaltar que:

> Sendo **x** um número real qualquer e **k** um número par positivo temos:
>
> a) $\sqrt[k]{x}$ é real $\Leftrightarrow x \geq 0$
>
> b) $\sqrt[k]{x} \geq 0$, para todo real $x \geq 0$

7.2 – RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO IRRACIONAL

De modo geral, o processo usado para resolver equações irracionais é elevar os dois membros da equação a uma potência conveniente (várias vezes, se necessário), até eliminar os radicais. Porém, quando elevamos os dois membros da equação a um expoente par, a nova equação não é obrigatoriamente equivalente à equação original e portanto a nova equação pode apresentar raizes que não verificam a equação original. Este fato será melhor entendido através dos exemplos a seguir:

Exemplo

Sabemos que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ porém a implicação $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ não é verdadeira para quaisquer **a** e **b**. Assim a equivalência

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

não é válida para **a** e **b** quaisquer.

Conforme vimos na propriedade P_7 do capitulo 4, a equivalência $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ é válida quando **a** e **b** pertencem a $\mathbb{R}_+$.

Exemplo

Consideremos a equação $\sqrt{2x+5} = x+1$.

Vamos elevar os dois membros ao quadrado:

$2x + 5 = (x + 1)^2$

$2x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

Porém, antes de *aceitarmos* estas raizes, vamos fazer a verificação na equação original:

$$\text{Para } x = 2 \begin{cases} \sqrt{2x+5} = \sqrt{2(2)+5} = 3 \\ x+1 = 2+1 = 3 \end{cases}$$

Portanto, para x = 2 a sentença aberta $\sqrt{2x+5} = x+1$ torna-se verdadeira.

Para x = −2 $\begin{cases} \sqrt{2x+5} = \sqrt{2(-2)+5} = 1 \\ x+1 = -2+1 = -1 \end{cases}$

Portanto, x = −1 não satisfaz a equação $\sqrt[3]{2x-5} = x+1$.

Assim o conjunto-solução da equação proposta é S = {2}.

Não é necessário fazer a verificação quando elevarmos os dois membros da equação apenas a expoentes ímpares, pois, de acordo com a propriedade P_9 do capítulo 4, temos que para n natural e ímpar:

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Consideremos a equação $\sqrt[3]{x^2+11x+1} = x+1$

Vamos elevar os dois membros ao cubo:

$$x^2 + 11x + 1 = (x+1)^3 \quad \text{(I)}$$

Lembrando que $\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{cases}$ temos:

$(x + 1)^3 = x^3 + 3(x)^2 (1) + 3x (1)^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

E, assim, a equação (I) transforma-se em:

$$x^2 + 11x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$

Porém:

$x^3 + 2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -4$

Podemos então, em resumo, escrever:

$\sqrt[3]{x^2+11x+1} = x+1 \Leftrightarrow x^2+11x+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+2x^2-8x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -4$

Neste caso, como elevamos os dois membros a expoente ímpar, podemos "confiar" nas raízes 0, 2 e − 4 e dizer que o conjunto-solução é:

$$S = \{0; 2; -4\}$$

Em alguns casos de equações envolvendo radicais de índice par, podemos resolver a equação sem fazer a verificação. Esses casos serão analisados a seguir.

7.3 – EQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt[k]{a} = b$

Consideremos uma equação irracional do tipo $\sqrt[k]{a} = b$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ e é par. Para que a equação tenha solução, antes de tudo devemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Supondo satisfeitas estas condições, podemos elevar os dois membros à potência k obtendo $a = b^k$. Porém, impor $a = b^k$, automaticamente garante $a \geq 0$ (pois k é par). Assim, em resumo, podemos estabelecer:

Para $k \in \mathbb{N}^*$ e par:

$$\sqrt[k]{a} = b \Leftrightarrow a = b^k \wedge b \geq 0$$

Consideremos novamente a equação vista no penúltimo exemplo:

$$\sqrt{2x+5} = x+1$$

Temos então:

$$\sqrt{2x+5} = x+1 \Leftrightarrow 2x+5 = (x+1)^2 \wedge x+1 \geq 0$$

Resolvendo a equação $2x + 5 = (x + 1)^2$ obtemos as raízes: $x' = -2$ e $x'' = 2$. No entanto, apenas a raiz $x'' = 2$ satisfaz à condição $x + 1 \geq 0$. Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \{2\}$$

7.4 – EQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b}$

Consideremos uma equação do tipo $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b}$ onde $k \in \mathbb{N}^*$ e é par. Para a equação ter solução, devemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Supondo estas condições válidas devemos ter ainda $a = b$. Assim temos:

$$\boxed{\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b} \Leftrightarrow a = b \wedge a \geq 0} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad k \text{ é par}$$

ou então

$$\boxed{\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b} \Leftrightarrow a = b \wedge b \geq 0} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad k \text{ é par}$$

Exemplo

Consideremos a equação: $\sqrt[6]{x^2+4x+3} = \sqrt[6]{x+1}$.

Temos: $\sqrt[6]{x^2+4x+3} = \sqrt[6]{x+1} \Leftrightarrow x^2+4x+3 = x+1 \wedge x+1 \geq 0$

Resolvendo a equação $x^2 + 4x + 3 = x + 1$ obtemos as raízes $x' = -2$ e $x'' = -1$. Dessas duas raízes apenas $x'' = -1$ satisfaz à condição $x + 1 \geq 0$. Portanto:

$$S = \{-1\}$$

Exercícios Resolvidos

7.1) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x^2 - 16} = 0$ b) $(x^2 - 3x - 4) \cdot \sqrt{x^2 - 9} = 0$

Solução:

a) $\sqrt{x^2 - 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$

$V = \{4, -4\}$

b) $(x^2-3x-4)\cdot\sqrt{x^2-9}=0 \Leftrightarrow (x^2-3x-4=0 \vee x^2-9=0) \wedge x^2-9 \geq 0$

$$\begin{cases} \text{A equação } x^2-3x-4=0 \text{ tem raízes } -1 \text{ e } 4 \\ \text{A equação } x^2-9=0 \text{ tem raízes } 3 \text{ e } -3 \end{cases}$$

Antes de aceitar estas raizes devemos ver se satisfazem a condição $x^2 - 9 \geq 0$. Fazendo a verificação observamos que a única que não satisfaz é -1.

Assim:

$$V = \{4; 3; -3\}$$

7.2) Resolva as equações:

a) $\sqrt[3]{3x+4} = 4$ b) $\sqrt{x+6} + 2x = 9$

Solução:

a) $\sqrt[3]{3x+4} = 4 \Leftrightarrow 3x+4=4^3 \Leftrightarrow 3x=60 \Leftrightarrow x=20$

$V = \{20\}$

b) 1º modo

$\sqrt{x+6}+2x=9 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=9-2x$

Elevando ao quadrado os dois membros desta última equação obtemos:

$$x + 6 = (9 - 2x)^2$$

que resolvida nos dá as raizes 3 e $\dfrac{25}{4}$

Façamos a verificação:

$$x = 3 \begin{cases} \sqrt{x+6} = 9-2x \\ \sqrt{3+6} = 9-2(3) \text{ (verdade)} \end{cases}$$

$$x = \frac{25}{4} \begin{cases} \sqrt{x+6} = 9-2x \\ \sqrt{\frac{25}{4}+6} = 9-2\left(\frac{25}{4}\right) \text{ (falso)} \end{cases}$$

Portanto, $\dfrac{25}{4}$ não convém e assim: $V = \{3\}$

2º modo

$\sqrt{x+6} = 9-2x \Leftrightarrow (x+6)=(9-2x)^2 \wedge 9-2x \geq 0$

Resolvendo a equação $x + 6 = (9 - 2x)^2$ obtemos as raizes 3 e $\dfrac{25}{4}$.

Destas, apenas o número 3 satisfaz à condição $9 - 2x \geq 0$. Assim:

$$V = \{3\}$$

7.3) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x+23} - \sqrt{x+16} = 1$ b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

Solução:

a) Para que as raizes sejam reais, temos as seguintes condições:

$$(I)\ \begin{cases} x+23 \geq 0 \\ x+16 \geq 0 \end{cases}$$

Supondo estas condições válidas, antes de elevar ao quadrado é preferível deixar um radical de cada lado (quando possível):

$\sqrt{x+23} - \sqrt{x+16} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+23} = 1 + \sqrt{x+16}$

Elevando ao quadrado os dois membros:

$(\sqrt{x+23})^2 = (1+\sqrt{x+16})^2$

$x+23 = 1 + 2\sqrt{x+16} + x + 16$

$\sqrt{x+16} = 3 \Leftrightarrow x+16 = 3^2 \Leftrightarrow x = -7$

O número −7 satisfaz às condições (I) e fazendo a verificação na equação original, verificamos que −7 é raiz.

$$V = \{-7\}$$

b) Devemos ter:

$$(I)\ \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \\ 5x+9 \geq 0 \end{cases}$$

Supondo válidas estas condições, temos:

$(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{5x+9})^2$

$2x+3+2\sqrt{2x+3}\ \sqrt{3x+4} + 3x + 4 = 5x + 9$

$\sqrt{(2x+3)(3x+4)} = 1$

$(2x+3)(3x+4) = 1$

$6x^2 + 17x + 11 = 0$

Esta última equação tem raizes: −1 e $-\frac{11}{6}$.

Destes dois números, apenas −1 satisfaz às condições (I)
Fazendo a substituição, observamos que −1 satisfaz à equação original:

$$V = \{-1\}$$

7.4) Resolva a equação: $\dfrac{6}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}} = 3$

Solução:

Antes de tudo, vamos impor:

$$(I)\ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

Supondo estas condições válidas, e lembrando que: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, vamos tomar para denominador comum o produto:

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4}) = (x-1) - (x-4) = 3$$

Multiplicando todos os termos pelo denominador comum, temos:

$$6(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4}) + 1(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}) = 3(3)$$

$$6\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 9$$

$$7\sqrt{x-1} - 5\sqrt{x-4} = 9$$

$$7\sqrt{x-1} = 9 + 5\sqrt{x-4}$$

Elevando ao quadrado:

$$49(x-1) = 81 + 25(x-4) + 2(9)(5\sqrt{x-4})$$

$$49x - 49 = 81 + 25x - 100 + 90\sqrt{x-4}$$

$$24x - 30 = 90\sqrt{x-4}$$

$$4x - 5 = 15\sqrt{x-4}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$16x^2 - 40x + 25 = 225(x-4)$$
$$16x^2 - 40x + 25 = 225x - 900$$
$$16x^2 - 265x + 925 = 0$$
$$\Delta = 265^2 - 4(16)(925) = 11025$$
$$(\sqrt{\Delta} = 105)$$

$$x = \frac{265 \pm 105}{32} \begin{cases} x' = \dfrac{185}{16} \\ x'' = 5 \end{cases}$$

As duas raízes satisfazem às condições (I).

Portanto: $V = \left\{\dfrac{185}{16}; 5\right\}$

Exercícios Propostos

7.5) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x^2 + x - 20} = 0$

b) $\sqrt[3]{x^2 + 7x} = 0$

c) $\sqrt{3x - 12x} + \sqrt{x^2 - 16} = 0$

7.6) Resolva as equações:

a) $\sqrt{7x + 14} = x + 2$

b) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x + 1}$

c) $\sqrt{2x - 7} - \sqrt{x - 4} = 1$

d) $\sqrt{5x + 21} - 2 = \sqrt{x + 13}$

7.7) Resolva a equação: $\sqrt{\dfrac{2x}{1-3x}} + \sqrt{\dfrac{1-3x}{2x}} = \dfrac{13}{6}$.

(Sugestão: faça $\sqrt{\dfrac{2x}{1-3x}} = y$ e $\sqrt{\dfrac{1-3x}{2x}} = \dfrac{1}{y}$)

7.8) Resolva as equações:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{6-x}} = -1$ b) $\sqrt{x+1+\sqrt{2x+2}} = 2$

7.9) Resolva as equações:

a) $\sqrt[4]{252+\sqrt[3]{x^2+39}} = 4$ b) $\sqrt[3]{x^2-1} = x-1$

7.5 – INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

Inequações irracionais são inequações em que a variável aparece sob radical. De modo geral, para resolver uma inequação irracional, a idéia é elevar os dois membros a uma potência conveniente para "eliminar" os radicais. No entanto, neste momento, devemos nos lembrar das propriedades P_{11} e P_{12} vistas no item 4.6 do capítulo 4:

P_{11}: Para $n \in \mathbb{N}$ e ímpar, $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ quaisquer que sejam os reais a e b.

P_{12}: Para $n \in \mathbb{N}^*$ e par, $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ quaisquer que sejam a e b pertencentes a $\mathbb{R}_+$.

Em outras palavras, quando elevamos os dois membros de uma desigualdade do tipo $a > b$ a um expoente ímpar, a nova desigualdade é equivalente à original; no entanto, se elevarmos a expoente par (não-nulo), a desigualdade só é válida se a e b pertencerem a $\mathbb{R}_+$.

Assim, quando o radical for de índice ímpar, podemos elevar os dois membros ao expoente ímpar em questão e com certeza a nova desigualdade será equivalente à anterior. A dificuldade aparece, portanto, nas inequações envolvendo radicais de índice par. São estes casos que necessitarão uma análise mais detalhada. Porém, antes de analisá-los, veremos alguns casos que não exigem nenhum método especial.

Exercícios Resolvidos

7.10) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2-5x+4} > 0$ e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} > 0$

b) $\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$ f) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \geq 0$

c) $\sqrt{x^2-5x+4} < 0$ g) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} < 0$

d) $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 0$ h) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \leq 0$

Solução:

a) Para a existência da raiz devemos ter: $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. Lembrando que para todo $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a} \geq 0$, temos:

$\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 4 & \\ + & & - & & + \end{array}$$

O trinômio apresenta raízes 1 e 4.

Assim, temos $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

c) A expressão $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ nunca poderá ser negativa. Assim, $V = \varnothing$.

d) Como a expressão $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ não pode ser negativa, a sentença $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq 0$ só é verdadeira se $x^2 - 5x + 4 = 0$. Assim:

$$V = \{1; 4\}$$

e) Como neste caso o índice da raiz é ímpar, temos:

$\sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$$

f) $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

g) $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$$

h) $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

7.11) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-1)^2} > 3$

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 2$

Solução:

a) Lembrando que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$, temos: $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$

Assim:

$\sqrt{(x-1)^2} > 3 \Leftrightarrow |x - 1| > 3 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \text{ ou } x - 1 < 3 \Leftrightarrow x > 4 \text{ou } x < -2$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } x < -2\}$$

b) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

Portanto $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|$. Então:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 2 \Leftrightarrow |x - 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

7.12) Resolva a inequação: $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} \geq 0$

Solução:

A expressão $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$ resulta um número real desde que $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.

Por outro lado, satisfeita esta condição, teremos $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq 0$.

Mas como o radical aparece no denominador, devemos ter $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > 0$.

Temos então:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0 \text{ e } x^2 + 3x - 10 > 0.$$

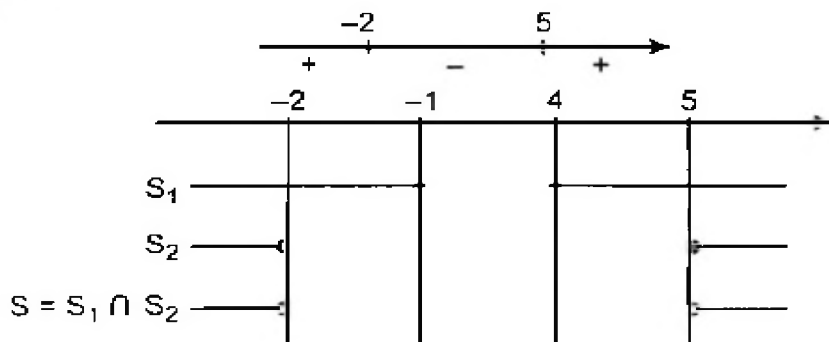
Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2 + 3x - 4 \geq 0$.

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -1$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x^2 - 3x - 10 > 0$.

$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -2$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

O conjunto-solução da inequação proposta é $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$$

7.13) Resolva a inequação: $x^2 + \sqrt{x - 3} \leq 3x + 10 + \sqrt{x - 3}$

Solução:

Para que a expressão $\sqrt{x-3}$ exista (dentro dos reais) devemos impor $x - 3 \geq 0$; desde que exista, a inequação proposta será equivalente a $x^2 \leq 3x + 10$:

$$x^2 + \sqrt{x-3} \leq 3x + 10 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x^2 \leq 3x + 10 \wedge x - 3 \geq 0$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2 \leq 3x + 10$

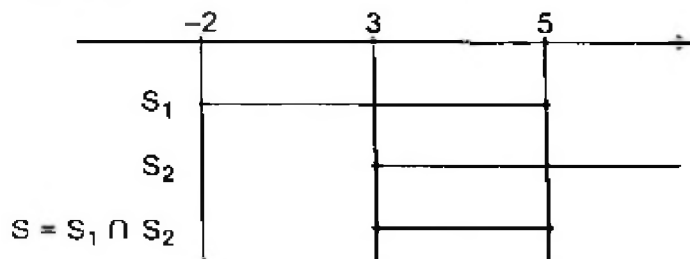
$x^2 \leq 3x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 5$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x - 3 \geq 0$.

$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

Assim, o conjunto-solução da inequação será $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

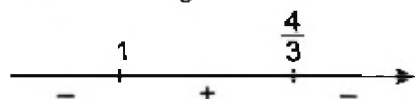
7.14) Resolva a inequação: $x - 2 < \sqrt[3]{x^3 - 2x}$.

Solução:

Como neste caso o índice do radical é ímpar, temos:

$$x - 2 < \sqrt[3]{x^3 - 2x} \Leftrightarrow (x-2)^3 < x^3 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 < x^3 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + 14x - 8 < 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 7x - 4 < 0$$

$$-3x^2 + 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

Como queremos $-3x^2 + 7x - 4 < 0$, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3} \right\}$$

Exercícios Propostos

7.15) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x-4} > 0$

b) $\sqrt{x-4} \geq 0$

c) $\sqrt{x-4} < 0$

d) $\sqrt{x-4} \leq 0$

e) $\sqrt[5]{x-4} > 0$

f) $\sqrt[5]{x-4} \geq 0$

g) $\sqrt[5]{x-4} < 0$

h) $\sqrt[5]{x-4} \leq 0$

7.16) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-5)^2} \geq 6$

b) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} < 8$

7.17) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{25 - x^2} + x^2 \geq 5x - 6 + \sqrt{25 - x^2}$

b) $\sqrt{36 - x^2} \cdot (x^2 - 4x - 21) \leq 0$

c) $\dfrac{x^2 - 4x - 21}{\sqrt{36 - x^2}} \leq 0$

7.18) Resolva as inequações:

a) $\sqrt[5]{x-8} > 2$

b) $\sqrt[5]{7x-9} < 5$

c) $2x + 1 > \sqrt[3]{8x^3 + 4x + 11}$

7.6 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} < b$

Consideremos uma inequação do tipo $\sqrt{a} < b$. Para a existência da raiz devemos impor: $a \geq 0$. Por outro lado sabemos que $\sqrt{a} \geq 0$ (desde que $a \geq 0$) e portanto b deve ser positivo. Temos então:

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ \text{e} \\ a \geq 0 \\ \text{e} \\ b > 0 \end{cases}$$

Temos também:

$$\sqrt{a} \le b \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b^2 \\ e \\ a \ge 0 \\ e \\ b \ge 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.19) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2 + 3x} < 2$

b) $\sqrt{2x^2 - x - 11} < x - 1$

c) $\sqrt{2x^2 - x - 11} \le x - 1$

Solução:

a) Aqui temos 2 > 0 e portanto:

$$\sqrt{x^2 + 3x} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x < 2^2 \\ x^2 + 3x \ge 0 \end{cases}$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2 + 3x < 2^2$

$x^2 + 3x < 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 1$

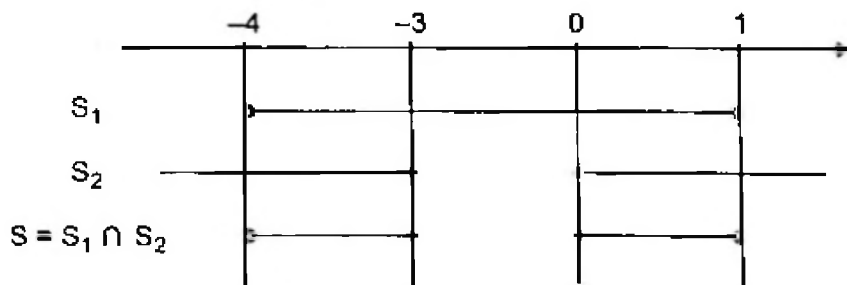
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x^2 + 3x \ge 0$

$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -3$ ou $x \ge 0\}$

–3 0

\+ – +

O conjunto-solução da inequação proposta é $S = S_1 \cap S_2$

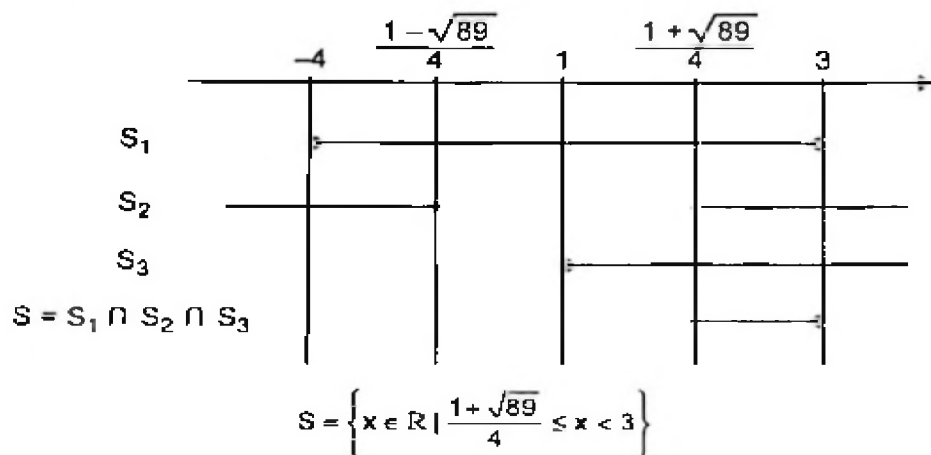
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \le -3$ ou $0 \le x < 1\}$

b)

$$\sqrt{2x^2 - x - 11} < x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 11 < (x-1)^2 \\ \wedge \\ 2x^2 - x - 11 \geq 0 \\ \wedge \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $2x^2 - x - 11 < (x-1)^2$
Resolvendo esta inequação obtemos:
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $2x^2 - x - 11 \geq 0$.
Resolvendo esta inequação, obtemos:
$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1-\sqrt{89}}{4} \text{ ou } x \geq \frac{1+\sqrt{89}}{4}\right\}$

Seja S_3 o conjunto-solução de $x - 1 > 0$
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{89}}{4} \leq x < 3\right\}$$

c)

$$\sqrt{2x^2 - x - 11} \leq x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 11 \leq (x-1)^2 \ (S_1) \\ \wedge \\ 2x^2 - x - 11 \geq 0 \qquad (S_2) \\ \wedge \\ x - 1 \geq 0 \qquad (S_3) \end{cases}$$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 3\}$

$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \le \frac{1-\sqrt{89}}{4} \text{ ou } x \ge \frac{1+\sqrt{89}}{4}\right\}$

$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{89}}{4} \le x \le 3\right\}$

Exercícios Propostos

7.20) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2 - 7x} < 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} > \sqrt{x^2 - x}$

7.21) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{2x^2 - 2x - 20} < x - 2$ b) $2x - 3 > \sqrt{x - 1}$

7.7 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

Aqui devemos ter $a \ge 0$, $b \ge 0$ e $a > b$. Assim:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ \wedge \\ b \ge 0 \end{cases}$$

Do mesmo modo temos:

$$\sqrt{a} \ge \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge b \\ \wedge \\ b \ge 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.22) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{3x - 1} > \sqrt{x + 10}$ b) $\sqrt{4x + 1} > \sqrt{-x + 5}$

Solução:

a) $\sqrt{3x - 1} > \sqrt{x + 10} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > x + 10 & (S_1) \\ \wedge \\ x + 10 \ge 0 & (S_2) \end{cases}$

$3x - 1 > x + 10 \Leftrightarrow x > \frac{11}{2}$ $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{2}\right\}$

$x + 10 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -10$ $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -10\}$

O conjunto-solução S da inequação proposta é dado por: $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{2}\right\}$$

b) $$\sqrt{4x-1} > \sqrt{-x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1 > -x+5 & (S_1) \\ \wedge \\ -x+5 \geq 0 & (S_2) \end{cases}$$

$4x+1 > -x+5 \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{5}$ $\qquad S_1 = \left]\dfrac{4}{5}; +\infty\right[$

$-x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ $\qquad S_2 =]-\infty; 5]$

$S = S_1 \cap S_2 = \left]\dfrac{4}{5}; 5\right]$

Exercício Proposto

7.23) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{3+8} \geq \sqrt{5x-1}$

b) $\sqrt{x-7} > \sqrt{-x+3}$

c) $\sqrt{x^2+3x} > \sqrt{8+10x}$

d) $\sqrt{x-8} < \sqrt{4x-1}$

7.8 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} > b$

Neste caso, em primeiro lugar, devemos ter $a \geq 0$. Satisfeita esta condição, $\sqrt{a} \geq 0$. Assim, se por exemplo b for negativo, a inequação estará automaticamente satisfeita. Se $b \geq 0$, teremos $a > b^2$. Em resumo:

$$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b^2 \quad \text{e} \quad b \geq 0 \\ \text{ou} \\ a \geq 0 \quad \text{e} \quad b < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b^2 \quad \text{e} \quad b \geq 0 \\ \text{ou} \\ a \geq 0 \quad \text{e} \quad b \leq 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.24) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x-3} > -5$ $\qquad$ b) $\sqrt{x-3} > 0$ $\qquad$ c) $\sqrt{x-3} > 4$

Solução:

a) Desde que $\sqrt{x-3}$ seja real, teremos $\sqrt{x-3} \geq 0$ e portanto, desde que $\sqrt{x-3}$ seja real, a sentença aberta $\sqrt{x-3} > -5$ será verdadeira. Portanto:

$\sqrt{x-3} > -5 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

b) $\sqrt{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $\sqrt{x-3} > 4 \Leftrightarrow x-3 > 4^2 \Leftrightarrow x > 19$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 19\}$

7.25) Resolva a inequação $\sqrt{2x^2-8x-17} > x-2$.

Solução:

$$\sqrt{2x^2-8x-17} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x-17 > (x-2)^2 \text{ e } x-2 \geq 0 & (S_1) \\ \text{ou} \\ 2x^2-8x-17 \geq 0 \text{ e } x-2 < 0 & (S_2) \end{cases}$$

Seja V_1 o conjunto-verdade de $2x^2-8x-17 > (x-2)^2$

Fazendo os cálculos, obtemos: $V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 7\}$

Seja V_2 o conjunto-verdade de $x-2 \geq 0$. Temos: $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

Seja V_3 o conjunto-verdade de $2x^2-8x-17 > 0$. Obtemos:

$$V_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Sendo V_4 o conjunto-verdade de $x-2 < 0$ temos: $V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

$S_1 = V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

$$S_2 = V_3 \cap V_4 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2}\right\}$$

O conjunto-solução S é dado por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x > 7\right\}$$

Exercícios Propostos

7.26) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2-4x} > -3$

b) $\sqrt{x^2-4x} > 0$

c) $\sqrt{x^2-4x} > 2\sqrt{3}$

7.27) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{2x^2+9x-1} > x+3$

b) $\sqrt{6x+19} > x+2$

7.9 – EXPRESSÕES DO TIPO $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

Sendo a e b dois números racionais tais que b > 0, consideremos a expressão:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

onde $a+\sqrt{b} > 0$.

Em certos casos pode-se fazer a transformação:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r}+\sqrt{s}$$

onde r e s são números racionais positivos.

Analogamente, dada a expressão $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, com $a-\sqrt{b} > 0$, em certos casos pode-se fazer a transformação $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{r}-\sqrt{s}$ com r e s racionais positivos.

Antes de estudar o caso geral, vejamos alguns exemplos.

Exemplos

Consideremos a expressão $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ e suponhamos que existam dois números racionais positivos r e s, tais que:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{r}+\sqrt{s}$$

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{r}+\sqrt{s} \Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = (\sqrt{r}+\sqrt{s})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+2\sqrt{r}\sqrt{s}+s \Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+s+2\sqrt{rs} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+s+\sqrt{4rs}$$

Para que esta última igualdade seja válida, devemos ter:

$$\begin{cases} r+s=5 \\ 4rs=21 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} r+s=5 \\ rs=\dfrac{21}{4} \end{cases}$$

Lembrando das relações de Girard para uma equação do segundo grau (ver capítulo 3, item 3.11) concluímos que r e s devem ser raízes da seguinte equação:

$$x^2-5x+\frac{21}{4}=0$$

Esta última equação tem raízes: $\frac{7}{2}$ e $\frac{3}{2}$

Portanto, temos:

$$r=\frac{7}{2} \text{ e } s=\frac{3}{2}$$

ou então $r = \frac{3}{2}$ e $s = \frac{7}{2}$, o que dá no mesmo.

Assim:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Consideremos agora a possibilidade da transformação, no caso geral.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r} + \sqrt{s}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r} + \sqrt{s} \Leftrightarrow a+\sqrt{b} = r + 2\sqrt{r}\sqrt{s} + s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b} = r+s+\sqrt{4rs} \Leftrightarrow a = r+s \text{ e } 4rs = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r+s = a \text{ e } rs = \frac{b}{4}$$

Então, os valores de r e s devem ser as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$$

O discriminante desta equação é:

$$\Delta = a^2 - 4\left(\frac{b}{4}\right) = a^2 - b$$

e as raízes serão das por:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-b}}{2}$$

Portanto, para que as raizes da equação $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$ sejam racionais, é necessário que $\sqrt{a^2-b}$ seja racional. Suponhamos então que $c = \sqrt{a^2-b}$ seja racional. Temos:

$$x = \frac{a \pm c}{2}$$

Assim: $r = \frac{a+c}{2}$ e $s = \frac{a-c}{2}$

e portanto:

$$\boxed{\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}}$$

Em resumo:

> Sejam a e b racionais, tais que
>
> $$b > 0 \text{ e } a + \sqrt{b} > 0.$$
>
> Desde que $c = \sqrt{a^2-b}$ seja **racional**, temos:
>
> $$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

De modo análogo, concluímos que:

> Sejam a e b racionais, com
> $$b > 0 \text{ e } a - \sqrt{b} > 0,$$
> Desde que $c = \sqrt{a^2 - b}$ seja **racional**, temos:
> $$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

É importante então observar que a transformação não é possível se $\sqrt{a^2 - b}$ **não for racional**.

Exercícios Resolvidos

7.28) Transforme $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$ na soma $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ onde r e s são racionais.

Solução:

Poderiamos fazer essa transformação como no primeiro exemplo deste item. No entanto vamos fazer uso da fórmula deduzida.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ onde } c = \sqrt{a^2 - b}$$

temos: $\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{36 - 11} = 5$

Como 5 é racional, a transformação é possível:

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6+5}{2}} + \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

7.29) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{8 + \sqrt{61}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Solução:

temos: $\begin{cases} a = 8 \\ b = 61 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{64 - 61} = \sqrt{3}$

Como $\sqrt{3}$ não é racional, a transformação não é possível.

7.30) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Solução:

Temos $2\sqrt{10} = \sqrt{4(10)} = \sqrt{40}$ e assim: $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}}$

temos: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 40 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

7.31) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y}$$

Solução:

Neste caso temos radical de índice 3 e portanto não vale a fórmula. Supondo então y > 0, temos:

$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y} \Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = (x+\sqrt{y})^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x\sqrt{y^2} + \sqrt{y^3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = (x^3+3xy) + (3x^2+y)\sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3xy = 7 \\ 3x^2+y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos y = 2 e x = 1

Assim,

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

Exercícios Propostos

7.32) Determine os números racionais x e y tais que as igualdades abaixo sejam verdadeiras.

a) $\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) $\sqrt{9+\sqrt{80}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

c) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

d) $\sqrt{8-\sqrt{15}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

e) $\sqrt{\frac{21}{4} - \sqrt{3}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

f) $\sqrt{6-\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

7.33) Efetue, se possível, a transformação:

$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$

onde a e b são racionais.

Exercícios Suplementares

IV.1) Resolva a equação $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = 4$

IV.2) Resolva a equação: $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$

IV.3) Resolva e discuta a equação: $\sqrt{x^2 - mx} = x + m$

IV.4) Resolva a inequação: $\sqrt{(2x-3)(x+1)} < x-1$

IV.5) Resolva a inequação: $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$

IV.6) Resolva a inequação: $x+2 < \sqrt[3]{x^3+8}$

IV.7) Discuta, segundo os valores de a e de b, o número de raízes da equação.

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b;\ a > 0 \text{ e } b > 0$$

IV.8) Resolva a inequação: $\frac{x+1}{x-4} \cdot \sqrt{\frac{x+3}{1-x}} < 0$

IV.9) Resolva a inequação: $\sqrt{x} - 9\sqrt[4]{x} + 18 \geq 0$

IV.10) Resolva a inequação: $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2 - 1$

IV.11) Resolva a inequação: $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$

IV.12) Considerem-se os números:

$$x_1 = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$x_2 = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Calcule $x_1^2 + x_2^2$ e $x_1 \cdot x_2$. Deduza o valor de $x_1 + x_2$.

IV.13) Verifique que $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

IV.14) Sendo a e b números racionais positivos, não quadrados perfeitos, com $a \neq b$, mostre que os números $s = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ e $d = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ são irracionais.

Aplicação: Sendo A e B números racionais positivos, B não quadrado perfeito, que relação deve existir entre A e B para que se possa ter dois números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\ ?$$

Calcule então x e y.

Simplifique: $\sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$

PARTE V

Capítulo 8 – **A álgebra das funções**

Capítulo 9 – **Tipologia das funções**

– **Função inversa**

A álgebra das funções

8.1 – AS OPERAÇÕES DA ARITMÉTICA

Sejam as funções f e g *reais e de variável real.*

A tabela abaixo define quatro novas funções, obtidas a partir das funções

Nome da função	Notação	Domínio	Contradomínio	Sentença aberta que a define
soma	$f + g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferença	$f - g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
produto	$f \cdot g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
quociente	$\frac{f}{g}$	$D(f) \cap D(g)$ com $g(x) \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplos

a) Sejam as funções f e g definidas por enumeração dos pares que as constituem:

$$f = \{(1; -1), (2; 2), (3; 2), (6; 7)\}$$

$$g = \{(1; 2), (2; 0), (3; 4), (9; 12), (20; 3)\}$$

Observe que $D(f) = \{1; 2; 3; 6\}$ e $D(g) = \{1; 2; 3; 9; 20\}$ e que $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$.

A *função soma* f + g tem domínio $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$, contradomínio $\mathbb{R}$ e:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 0 = 2$$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 2 + 4 = 6$$

Então:

$$f + g = \{(1; 1), (2; 2), (3; 6)\}$$

A *função diferença* f – g e a *função produto* f · g também têm domínio $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$, tem contradomínio $\mathbb{R}$ e:

$$f - g = \{(1; -3), (2; 2), (3; -2)\}$$

$$f \cdot g = \{(1; -2), (2; 0), (3; 8)\}$$

Observe que, por exemplo:

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 - 0 = 2$$
$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 2 \cdot 0 = 0$$

A *função quociente* $\frac{f}{g}$ tem domínio constituído pelos elementos x que pertencem ao conjunto $D(f) \cap D(g)$ tais que $g(x) \neq 0$; como $g(2) = 0$, tem-se:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{1; 3\} \text{ e } \frac{f}{g} = \left\{\left(1; -\frac{1}{2}\right), \left(3; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Note que $\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) Sejam as funções f e g definidas pelas sentenças abertas:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Então, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}_+$ e $D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}_+$

Daí, as funções $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ têm domínio $\mathbb{R}_+$, e são definidas, respectivamente, por:

$$(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$$
$$(f - g)(x) = x^2 - \sqrt{x}$$
$$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$$

A função quociente $\frac{f}{g}$ tem domínio:

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \mid x \in D(f) \cap D(g) \wedge g(x) \neq 0\}$; então, $D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}_+^*$, e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Sejam as funções f e g definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$
$$g(x) = \sqrt{5 - x}$$

a) Determine D(f) e D(g).

b) Determine os domínios das funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$.

c) Dê as sentenças abertas que definem cada uma dessas funções.

Solução:

a) $D(f) = [2; +\infty[$ e $D(g) =]-\infty; 5]$
b) Como $D(f) \cap D(g) = [2; 5]$ tem-se:

$$D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [2; 5]$$

Todo elemento x que pertence ao domínio de $\frac{f}{g}$ é tal que:

$$x \in D(f) \cap D(g) \text{ e } g(x) \neq 0$$

Então, $D\left(\frac{f}{g}\right) = [2; 5[$

c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{5-x}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

8.2) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, f e g, definidas pelas sentenças abertas:

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Para as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$:

a) determine os domínios.
b) dê as sentenças abertas que a definem.
c) desenhe os gráficos.

Solução:

a) Observe que $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ e então:

$D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \mid x \in D(f) \cap D(g) \wedge g(x) \neq 0\}$, como $g(0) = 0$ tem-se:

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*$

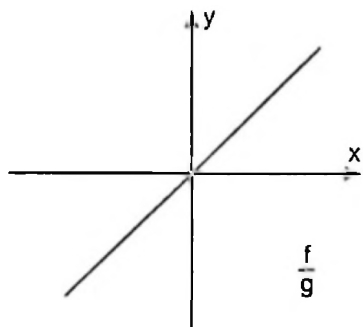
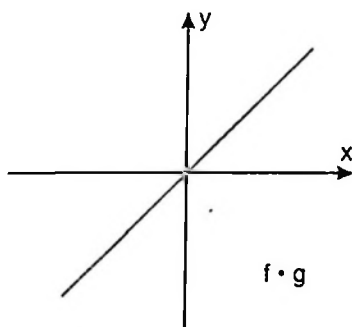
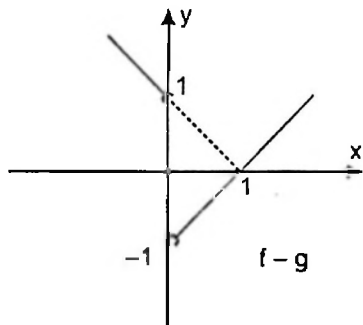
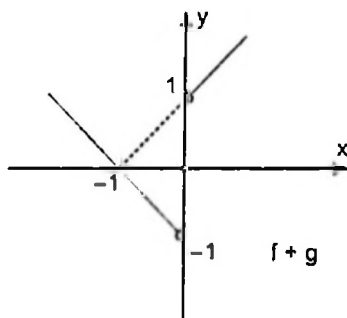
b) Como $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ vem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} x-1, \text{ se } x>0 \\ 0, \text{ se } x=0 \\ -x+1, \text{ se } x<0 \end{cases}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left.\begin{cases} x\cdot 1=x, \text{ se } x>0 \\ 0\cdot 0=0, \text{ se } x=0 \\ (-x)\cdot(-1)=x, \text{ se } x<0 \end{cases}\right\} = \text{ou seja}, (f\cdot g)(x)=x$$

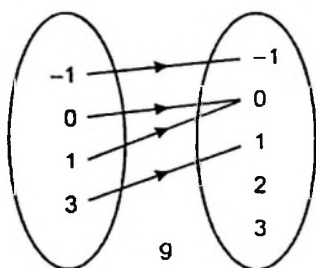
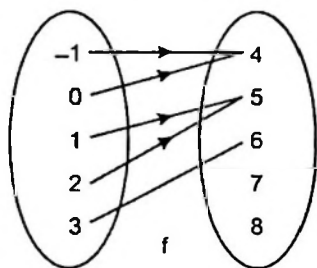
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\left.\begin{cases} \dfrac{x}{1}=x, \text{ se } x>0 \\ \dfrac{-x}{-1}=x, \text{ se } x<0 \end{cases}\right\} = \text{ou seja}, \left(\frac{f}{g}\right)(x)=x,\ x\neq 0$$

c)

Exercícios Propostos

8.3) Sejam as funções f e g definidas por enumeração dos pares que as constituem:

$$f = \{(0;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 3),\ (3;\ 4),\ (4;\ 5)\}$$
$$g = \{(1;\ 2),\ (2;\ 3),\ (3;\ 0),\ (6;\ -1)\}$$

Determine as funções $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ e $\frac{f}{g}$.

8.4) Sejam as funções f e g definidas pelos "diagramas de flechas":

Determine, através de "diagramas de flechas" as funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$.

8.5) Sejam as funções f e g, reais e de variável real, definidas por:

$$f(x) = x$$
$$g(x) = x^2 - 1$$

Para as funções: f + g, f − g, g − f, g · f, $\frac{g}{f}$ e $\frac{f}{g}$, determine:

a) o domínio de cada uma delas
b) a sentença aberta que define cada uma delas

8.6) Sejam as funções de ℝ em ℝ definidas por:

$$f(x) = |x| \text{ (função módulo)}$$
$$g(x) = [x] \text{ (função maior inteiro)}$$

a) Obtenha os domínios das funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$, e as sentenças abertas que definem cada uma delas.
b) Desenhe os gráficos das funções f + g e f · g, para $x \in [-2; 2[$.

8.2 – COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Basicamente, a idéia da composição de funções é a de uma "reação em cadeia", em que as funções "atuam" uma após a outra.

Exemplos

a) É comum, em nosso dia-a-dia, vermos raciocínios como o seguinte: "o Imposto de Renda (IR) pago por um cidadão é 'função' do seu salário; o salário é 'função' do número de horas que ele trabalha. Diz-se, então, que o IR pago pelo cidadão é 'função' do número de horas que ele trabalha"

Raciocinemos mais claramente nesse exemplo.

Imagine que o cidadão A receba 50 reais por hora de trabalho.
Podemos considerar a "função":

$$s(t) = 50t \quad (1)$$

que determina, em reais, o salário S do cidadão A quando ele trabalha um certo número t de horas.

Imagine que a Receita Federal adote a seguinte "fórmula" para obter o IR a pagar, a partir do salário s:

$$IR\ (s) = \frac{1}{6}(s - 300)\ (2)$$

Se o cidadão A trabalha 60 horas, qual é o IR devido?

Inicialmente calculemos o seu salário (fórmula (1)):

$$s(60) = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ (em reais)}$$

Em seguida, a partir do salário (3000 reais), calculemos o imposto a pagar (fórmula (2)):

$$IR(3000) = \frac{1}{6}(3000 - 300) = 450 \text{ (em reais)}$$

Observe que o IR a pagar é "função" das horas que o cidadão A trabalhou; para calculá-lo, *inicialmente* "aplicamos" a função s ao número 60; *em seguida*, ao resultado obtido, 3000, "aplicamos" a função IR, obtendo então o imposto devido.

Podemos sintetizar o cálculo, determinando uma única "função" (fórmula) que dá o imposto devido pelo cidadão A conhecendo-se o número de horas que ele trabalhou:

$$IR(s) = \frac{1}{6}(s - 300)$$

$$IR[s(t)] = \frac{1}{6}[s(t) - 300]$$

$$IR[s(t)] = \frac{1}{6}(50t - 300)$$

..o, o IR é "função" das horas de trabalho, dada pela "fórmula":

$$IR(t) = \frac{1}{6}(50t - 300)\ (3)$$

Então, para as 60 horas que o cidadão A trabalhou, o IR devido pode ser calculado fazendo t = 60 na "fórmula" (3):

$$IR(60) = \frac{1}{6}(50 \cdot 60 - 300)\ 450 \text{ (em reais)}$$

b) Sejam as funções f e g definidas, respectivamente, pelas sentenças abertas:

$$f(x) = 9x$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Se $x \geq 0$, então $f(x) = 9x$ é *não-negativo*, isto é, $f(x) \geq 0$; logo, f(x) pertence ao domínio de g. Temos então:

$$g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

A sentença aberta:

$$g[f(x)] = 3\sqrt{x}$$

define uma nova função, que se denomina **composta de g com f**, e que se representa com $g \circ f$ (lê-se: "g bola f").

Observe que o domínio de f é $\mathbb{R}$, mas elementos desse domínio são excluídos para se obter o domínio de $g \circ f$: se x é negativo então f(x) é negativo e não existiria $g[f(x)] = \sqrt{f(x)}$.

Resumindo, o domínio de $g \circ f$ é constituído por todo x do domínio de f tal que f(x) está no domínio de g.

No nosso exemplo, $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

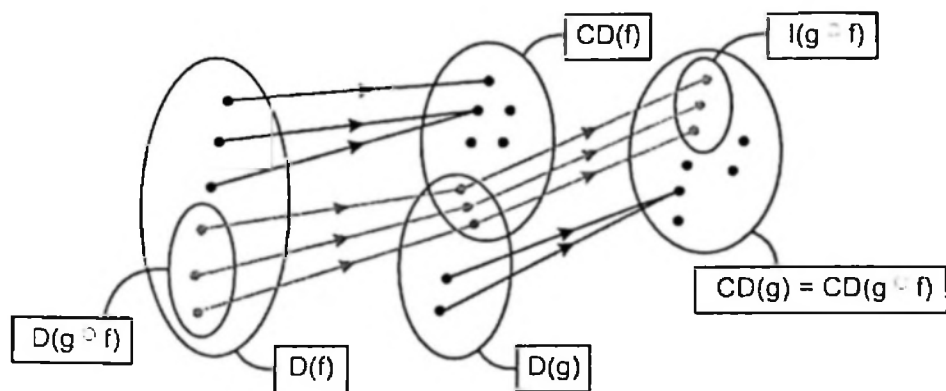
Definição

Dadas as funções g e f, $g \circ f$ é uma função que se diz **composta de g com f**, definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

O domínio de $g \circ f$ é:

$$D(g \circ f) = \{x \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$$

Adotaremos $CD(g \circ f) = CD(g)$

Exemplo

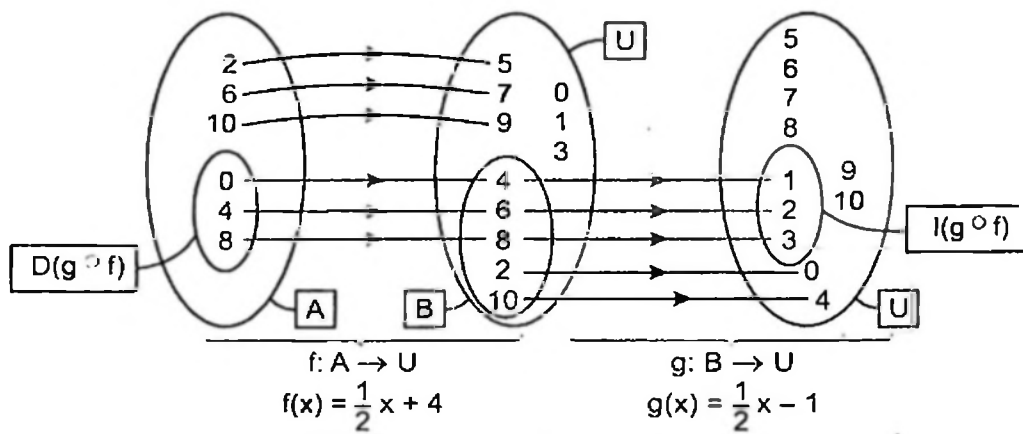
Sejam os conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$,

A = {0; 2; 4; 6; 8; 10} e B = {2; 4; 6; 8; 10}. Consideremos as funções g e f definidas por:

$$\begin{cases} g : B \to U \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: A \to U \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$f: A \to U$ | $g: B \to U$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ | $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$g \circ f: \{0; 4; 8\} \to U$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x + 4\right] - 1 = \frac{1}{4}x + 1$

Para se obter a função $g \circ f$ note que o conjunto: $I(f) \cap D(g)$ não pode ser vazio.

O domínio de $g \circ f$ é um *subconjunto do domínio de f*, constituído pelos elementos cujas imagens (dadas por f) pertencem ao domínio de g. No exemplo, observe que:

$$I(f) = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$D(g) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$$

$$I(f) \cap D(g) = \{4; 6; 8\}$$

$$D(g \circ f) = \{0; 4; 8\}$$

$$I(g \circ f) = \{1; 2; 3\}$$

$$CD(g \circ f) = CD(g) = U \text{ (convenção)}$$

Note, uma vez mais, que os elementos do domínio de $g \circ f$ são aqueles cujas imagens, dadas por f, pertencem ao conjunto: $I(f) \cap D(g)$; e, para que exista $g \circ f$, deve-se ter: $I(f) \cap D(g) \neq \varnothing$.

Observações

Não confunda a notação $g \circ f$ com a notação $g \cdot f$; note também que a grafia $g \circ f$ está "às avessas": a primeira função que se aplica é f e a segunda é g.

Dadas as funções g e f, pode-se pensar em duas funções compostas, $g \circ f$ e $f \circ g$, para as quais se tem, respectivamente:

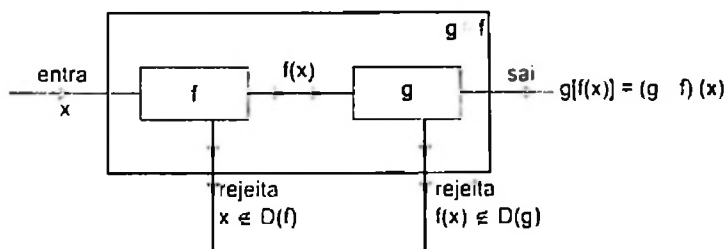
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

A composição de funções *não é uma operação comutativa*:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Uma Representação Esquemática

Podemos ilustrar, com o esquema da figura abaixo todo o processo para se construir a função $g \circ f$, composta de f com g:

Exercícios Resolvidos

8.7) Sejam as funções f e g definidas pelos pares que as constituem

$$f = \{(1; 2), (2; 5), (3; 6), (4; 0)\}$$

$$g = \{(2; 4), (5; 7), (6; 8), (-1; -3)\}$$

Obtenha a função $g \circ f$.

Solução:

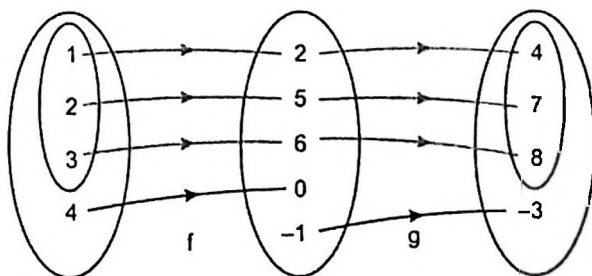
Calculamos: $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(2) = 4$

$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(5) = 7$

$(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(6) = 8$

Note que $4 \notin D(g \circ f)$, pois $f(4) = 0 \notin D(g)$.

Então:

$$g \circ f = \{(1; 4), (2; 7), (3; 8)\}$$

Observe que: D(f) = {1; 2; 3; 4}
I(f) = {2; 5; 6; 0}
D(g) = {2; 5; 6; −1}
I(f) ∩ D(g) = {2; 5; 6} ≠ ∅
I(g) = {4; 7; 8; −3}
D(g ∘ f) = {1; 2; 3}
I(g ∘ f) = {4; 7; 8}

8) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

a) Determine D(f) e D(g).
b) Determine D(g ∘ f).
c) Dê a sentença aberta que define g ∘ f.

Solução:

a) Para o domínio da função f, deve-se ter $x \neq 1$: D(f) = ℝ − {1}; e, para o domínio da função g, deve-se ter $x \neq 0$: D(g) = ℝ*.

b) D(f) = {x ∈ ℝ | x ≠ 1} e D(g) = {x ∈ ℝ | x ≠ 0}

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$$

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \wedge \frac{x^2 - 4}{x - 1} \neq 0\}$$

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \wedge 2 \wedge x \neq -2\}$$

c) Se $x \neq 1$, $x \neq 2$ e $x \neq -2$:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{x^2 - 4}{x - 1}} = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

9) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^3$$

Para as funções g ∘ f e f ∘ g, determine:

a) o domínio.
b) a sentença aberta que define cada uma delas.

Solução:

Note que $D(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e $D(g) = \mathbb{R}$

a) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^3 \in \mathbb{R}$ ← satisfeita para todo x

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f)\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \geq 0\}$

A inequação $x^3 \geq 0$ nos dá $x \geq 0$, e daí:

$$D(f \circ g) \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^3 = (\sqrt{x})^3$

$$(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^3$$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^3}$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3}$$

Note que para todo $x \geq 0$ tem-se $(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3}$; então como $D(g \circ f) = D(f \circ g)$, e como por convenção $CD(g \circ f) = CD(f \circ g)$ tem-se $g \circ f = f \circ g$

8.10) Sejam as funções reais e de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = x^2$$

a) Determine $(g \circ f)(1)$ e $(f \circ g)(2)$.

b) Determine $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

Solução:

a) $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(1) = 1^2 = 1$

$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(4) = 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$

$$= \begin{cases} g(x), & \text{se } g(x) \leq 1 \\ 2, & \text{se } g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 \leq 1 \\ 2, & \text{se } x^2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

Então:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

8.11) Se $f(x) = x + 2$, determine a sentença aberta que define uma função g tal que $(f \circ g)(x) = x$.

Solução:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = g(x) + 2$

Como $g(x) + 2 = x$, tem-se $g(x) = x - 2$.

8.12) Dadas as funções definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = (x - 1)^2$ e $h(x) = x + 2$, determine $[(h \circ f) \circ g](2)$.

Solução:

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{f[g(2)]\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{f[1]\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{3\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = 5$

8.13) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = 5x - 3$ e $g(x) = 2x + k$. Determine k para que $f \circ g = g \circ f$.

Solução:

Note que $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois f e g o são. Então, para que $f \circ g = g \circ f$ deve-se ter $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 5g(x) - 3 = 5(2x + k) - 3 = 10x + 5k - 3$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 2f(x) + k = 2(5x - 3) + k = 10x - 6 + k$

Então, deve-se ter: $5k - 3 = -6 + k$ e daí $k = -\frac{3}{4}$.

8.14) Se $f(x) = \frac{x-1}{x}$ determine: $f\{f[f(x)]\}$

Solução:

Começamos calculando $f[f(x)]$:

$$f[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)} = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

Agora,

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]} = \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{-1-x+1}{-1} = x$$

Então: $f\{f[f(x)]\} = x$

8.15) Determine: $f(x)$ se $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$.

Solução:

Fazendo $x + 1 = y$, e daí $x = y - 1$, tem-se:

$f(y) = (y - 1)^2 - 3(y - 1) + 2$

$f(y) = y^2 - 5y + 6$ (1)

Em (1), substituindo-se y por x:

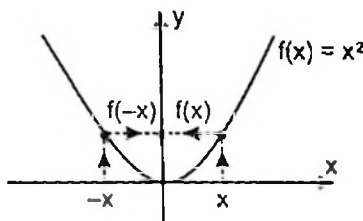
$f(x) = x^2 - 5x + 6$

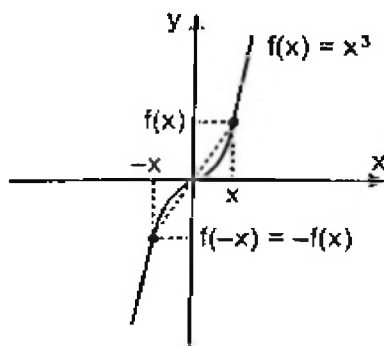
Seja f uma *função real de variável real*, de domínio A, para a qual: se $x \in A$, então $-x \in A$. Se para todo x de A se tem $f(-x) = f(x)$, f diz-se PAR. Se para todo x de A se tem $f(-x) = -f(x)$, f diz-se ÍMPAR.

8.16) Para as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas sentenças abaixo, diga qual é par e qual é ímpar:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = x^2 + x$

Solução:

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: par

Note que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.

b) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: ímpar

Note que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.

c) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \begin{cases} \neq f(x) : \text{não é par} \\ \neq -f(x) = -x^2 - x : \text{não é impar} \end{cases}$

Essa função não se classifica segundo o critério par ou ímpar.

Exercícios Propostos

8.17) Sejam as funções f e g definidas pelos pares que as constituem:

$$f = \{1; 2), (2; 1), (3; 4), (4; 6)\}$$
$$g = \{(2; 4), (3; 5), (5; 6)\}$$

Determine a função $g \circ f$.

8.18) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = (x - 1)^2$$
$$g(x) = 2x + 1$$

Calcule:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(g \circ f)(2)$

c) $(f \circ f)(1)$

d) $(g \circ g)\left(-\frac{7}{2}\right)$

Nos exercícios de 8.19 a 8.24 as sentenças abertas definem as funções f e g; determine em cada caso:

a) o domínio da função f
b) o domínio da função g
c) o domínio da função $g \circ f$
d) a sentença aberta que define $g \circ f$
e) o domínio da função $f \circ g$
f) a sentença aberta que define $f \circ g$

8.19) $f(x) = (x - 1)^2$ e $g(x) = x + 1$

8.20) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

8.21) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

8.22) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

8.23) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$

8.24) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^{-2}$

8.25) Sejam as funções reais e de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leq 1 \\ x, \text{ se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = 2x$$

a) Determine $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(4)$, $(f \circ f)(-1)$ e $(g \circ g)(3)$.

b) Determine $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

8.26) Se $f(x) = 2x - 3$ e $f[g(x)] = x$, determine $g(x)$.

8.27) Considere as funções f e g definidas por $g(x) = |x|$ e $f(x) = x + 2$.

a) Determine $(f \circ g)(x)$.

b) Desenhe o gráfico da função $f \circ g$.

c) Resolva a inequação $(f \circ g)(x) < 6$.

8.28) Suponha que as funções f e g são definidas por:

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = cx + d$$

Qual é a condição para que $f \circ g = g \circ f$?

8.29) Seja $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calcule $f\{f[f(x)]\}$.

8.30) Dadas as funções definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -x$ e $h(x) = x^2$, calcule $f\{g[h(-2)]\}$.

8.31) Para a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x$:

a) determine x se $f(x^2) = f(2x + 3)$.

b) verifique se $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$.

8.32) Se $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = (f \circ f)(x)$, determine $g(2)$.

8.33) Se $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -x$, determine x.

8.34) Se $f(x) = 2x + 3$, calcule:

a) $f(0)$

b) $f(-x)$

c) $f(x + 1)$

d) $f(x) + 1$

e) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $\frac{1}{f(x)}$

g) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

8.35) Determine $f(x)$ se $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

8.36) Sejam as funções f e g, de ℕ em ℕ, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ 2x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

a) Determine $(g \circ f)(5)$, $f[g(2)]$ e $(f \circ f)(3)$.

b) Determine $(g \circ f)(x)$.

8.37) Para as funções, de ℝ em ℝ, definidas pelas sentenças abaixo, diga qual é *par* e qual é *ímpar*.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = 3x - x^3$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$

8.38) Uma função f, de ℝ em ℝ, é ímpar. Determine f(0).

8.39) Verifique que $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ para:

$f : x \to x^2$

$g : x \to x$

$h : x \to \frac{1}{x}$

8.40) f, g e h são funções de ℝ em ℝ. Demonstre que:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

8.41) f, g e h são funções de E em E. Demonstre que:

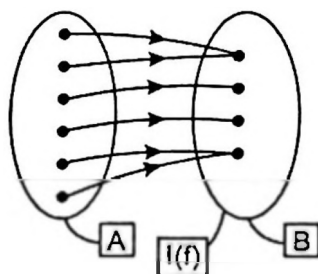
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Tipologia das funções - Função inversa

.1 – Função Sobrejetora

Definição

Seja f uma função de A em B; f diz-se **sobrejetora** se e somente se I(f) = B, isto é:

$$\text{f é sobrejetora} \Leftrightarrow I(f) = CD(f)$$

f é sobrejetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega pelo menos uma flecha".

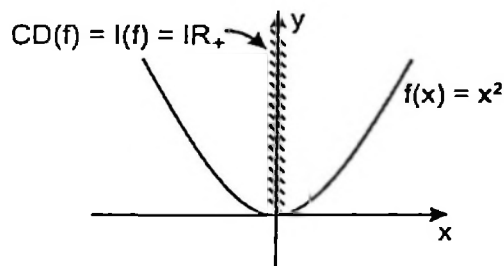
Note que se f é sobrejetora, para todo elemento y de B existe ao menos um elemento x de A tal que f(x) = y, isto é, todo y de B é imagem de "pelo menos um" x de A.

Quando a função f, de A em B, é sobrejetora, a equação f(x) = y admite para todo y ∈ B pelo menos uma solução.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$ é **sobrejetora**, pois para todo y, $y \in \mathbb{R}_+$, existe ao menos um **x** real, $x = \pm\sqrt{y}$, tal que f(x) = y.

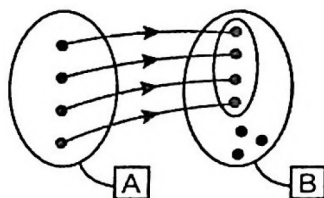
Note que o contradomínio de f é dado: $\mathbb{R}_+$; o conjunto-imagem de f obtém-se projetando o gráfico de f sobre o eixo Oy: $I(f) = \mathbb{R}_+$.

Então, $CD(f) = I(f) = \mathbb{R}_+$ e f é sobrejetora, por definição.

9.2 – FUNÇÃO INJETORA

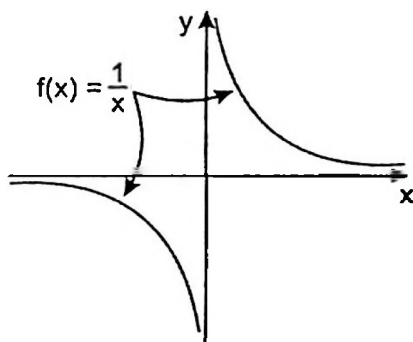
Seja f uma função de A em B; f diz-se injetora se e somente se quaisquer que sejam os elementos x_1 e x_2 em A, se $x_1 \neq x_2$ tem-se: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\text{f é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A; \forall x_2, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Note que se f é injetora, um elemento y de B não é necessariamente imagem de algum elemento x de A, mas, se o for, é imagem de um *único* x de A.

Quando a função f, de A em B, é injetora, a equação f(x) = y admite no máximo uma solução para todo $y \in B$.

f é injetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega no máximo uma flecha.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é **injetora**.

Note que y = 0 não é imagem de nenhum elemento x de $D(f) = \mathbb{R}^*$ e que todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, é imagem de um único x de $D(f) = \mathbb{R}^*$.

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}^*$, tem-se:

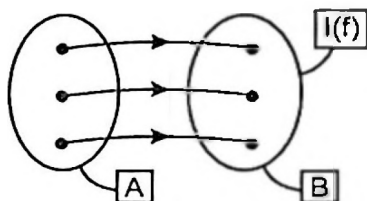
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

9.3 – FUNÇÃO BIJETORA

Definição

Seja f uma função de A em B; f diz-se **bijetora** se e somente se f é sobrejetora e é injetora.

f é bijetora $\Leftrightarrow$ (f é sobrejetora e f é injetora)

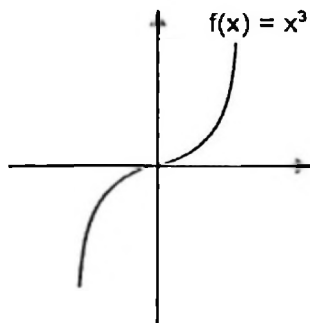
Note que se f é bijetora, para todo elemento y de B existe um e um só elemento x de A tal que f(x) = y, isto é, todo y de B é imagem de um e um só x de A.

f é bijetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega uma e uma só flecha".

Quando a função f, de A em B, é bijetora, a equação f(x) = y admite para todo $y \in B$ uma e uma só solução.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ é bijetora, pois para todo $y \in \mathbb{R}$ = CD(f) existe um e um só x de A, $x = \sqrt[3]{y}$, tal que:

$$f(x) = y$$

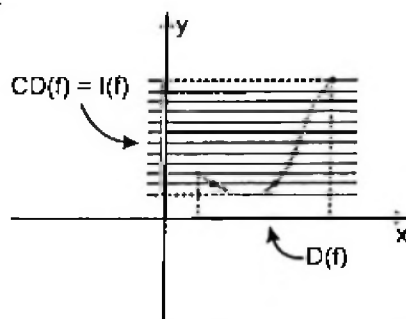
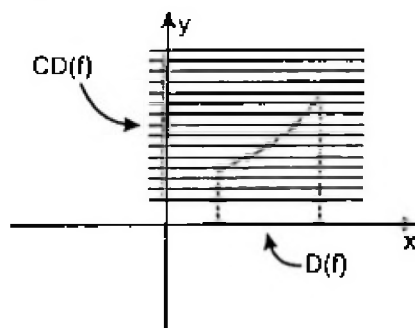
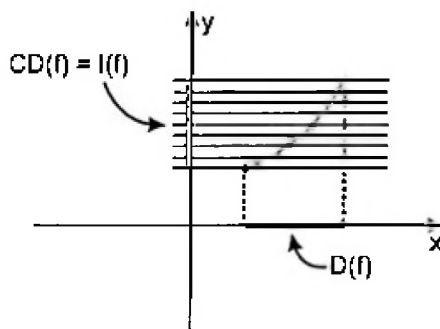
Note que f é sobrejetora e é injetora.

9.4 – UM RECONHECIMENTO GRÁFICO

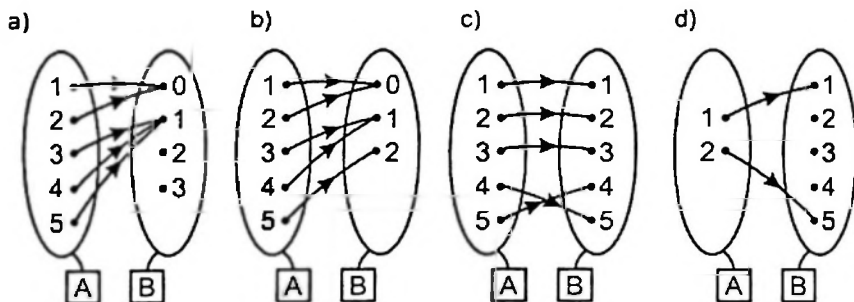
Seja f uma função real de variável real:

$$f: A \to B$$

Podemos verificar graficamente se f é sobrejetora ou injetora ou bijetora, da seguinte forma:

Traçamos retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos (0; y) com $y \in B$; então:

1°) Se essas retas encontram o gráfico de f em "pelo menos um" ponto, f é **sobrejetora**.

2°) Se essas retas encontram o gráfico de f "no máximo" em um ponto (há retas que não o encontram, mas aquelas que encontram o fazem em um único ponto) a função é **injetora**.

3°) Se essas retas encontram o gráfico de f em um e um só ponto, a função é **bijetora**.

Exercícios Resolvidos

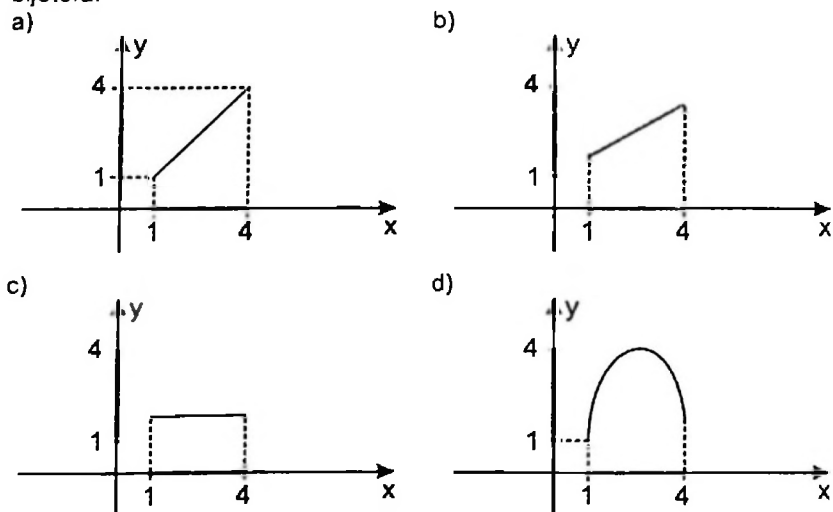
9.1) As funções abaixo estão definidas através de "diagramas de flechas"; diga qual é sobrejetora, qual é injetora e qual é bijetora:

Solução:

a) não é sobrejetora: nos elementos 2 e 3 de B não chegam flechas; observe que $I(f) \neq CD(f)$; não é injetora: nos elementos 0 e 1 de B chegam mais do que uma flecha; não é bijetora;

b) é sobrejetora: $I(f) = CD(f)$; não é injetora: nos elementos 0 e 1 de B chegam mais do que uma flecha; não é bijetora;

c) é sobrejetora: $I(f) = CD(f)$; é injetora: em cada elemento de B chega uma única flecha; é bijetora;

d) não é sobrejetora: nos elementos 2, 3 e 4 de B não chegam flechas, isto é, $I(f) \neq CD(f)$; é injetora: nos elementos 1 e 5 de B, onde chegam flechas, elas são únicas; não é bijetora.

9.2) As funções abaixo, definidas pelos gráficos, têm domínio A = [1; 4] e contradomínio A = [1; 4]. Diga qual é sobrejetora, qual é injetora e qual é bijetora:

Solução:

Quando conhecemos o gráfico de uma função f e queremos decidir se ela é sobrejetora ou injetora ou bijetora, traçamos retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos (0; y) com $y \in CD(f)$:

a) é bijetora; as retas encontram o gráfico em um e um só ponto; note que a função é sobrejetora e também é injetora;
b) é injetora; as retas encontram o gráfico no máximo em um ponto; não é sobrejetora e portanto não é bijetora;
c) não se classifica: não é sobrejetora, não é injetora e não é bijetora;
d) é sobrejetora; as retas encontram o gráfico em um ou mais do que um ponto; não é injetora e portanto não é bijetora.

9.3) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x|x| \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora.

Solução:

Vamos demonstrar que a equação:

$$x\,|x| = y \quad \text{(I)}$$

qualquer que seja y de $\mathbb{R} = CD(f)$, *admite uma e uma só solução*.

Se $y \geq 0$, tem-se:

$$x|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ \wedge \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Se $y \leq 0$, tem-se:

$$x|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ \wedge \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}$$

Portanto, a equação (I) admite, qualquer que seja o real y, solução única:

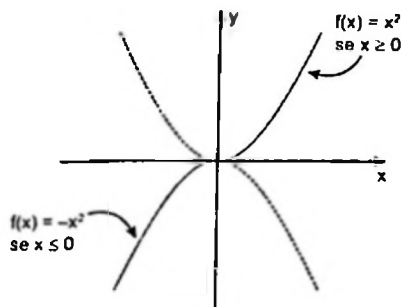
$$x = \sqrt{y} \text{ se } y \geq 0, x = -\sqrt{-y} \text{ se } y \leq 0$$

Para a obtenção do gráfico da função f note que:

Se $x \geq 0$: $|x| = x$ e $f(x) = x^2$

Se $x \leq 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = -x^2$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

f é bijetora: toda reta paralela ao eixo Ox
que passa por (0; y) com $y \in \mathbb{R}$ corta o gráfico em um e só um ponto.

9.4) Considere a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é par} \\ \dfrac{x+1}{2}, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Verifique se f é sobrejetora ou injetora ou bijetora.

Solução:

A função é sobrejetora, pois todo $a \in \mathbb{Z} = CD(f)$ é imagem de pelo menos um elemento de $\mathbb{Z} = D(f)$: esse elemento é 2a (par).

A função não é injetora, pois elementos do domínio da forma 2n e 2n − 1 têm mesma imagem: $f(2n) = f(2n - 1) = n$.

A função não é bijetora.

9.5) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em B, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

Determine B para que f seja sobrejetora.

Solução:

Para que f seja sobrejetora deve-se ter I(f) = CD(f); então:

$$B = I(f)$$

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

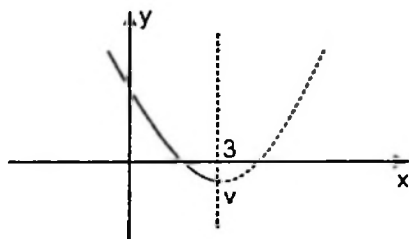
$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\} = [3; +\infty[$$

Daí: $B = [3; +\infty[$

9.6) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_0\}$. Considere a função f, de A em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Determine o maior valor de x_0 para que f seja injetora.

Solução:

Note que CD(f) = ℝ; para que f seja injetora, retas paralelas ao eixo Ox que passam por (0; y), $y \in \mathbb{R}$ = CD(f), devem encontrar o gráfico "no máximo" em um ponto.

Para que isso aconteça, o maior valor de x_0 é $x_0 = \frac{-b}{2a} = 3$.

9.7) Sejam f e g funções de E em E. Mostre que se f e g são *injetoras*, a função $g \circ f$ é *injetora*.

Solução:

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de E.

f é injetora: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

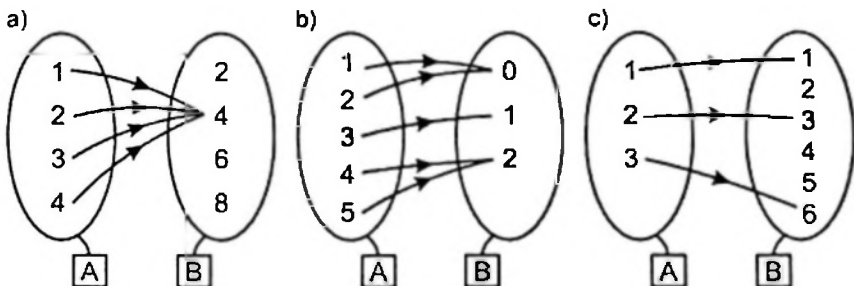
g é injetora: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$

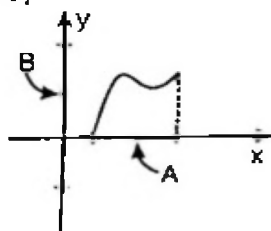
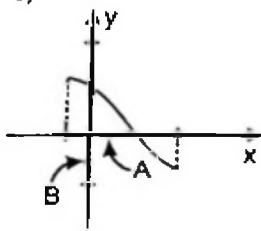
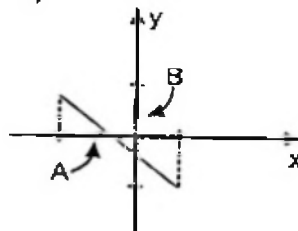
Portanto:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

isto é, $g \circ f$ é injetora.

Exercícios Propostos

9.8) As funções abaixo estão definidas através de "diagramas de flechas". Diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

9.9) As funções abaixo, de A em B, são definidas pelos gráficos. Diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

a)

b)

c)

9.10) Para as funções definidas abaixo, diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$

c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$

(Sugestão: raciocine graficamente.)

9.11) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4}\right\} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \dfrac{3x + 5}{4x - 3} \end{cases}$$

Verifique que f não é sobrejetora.

(Sugestão: número de soluções da equação $\dfrac{3x + 5}{4x - 3} = y$.)

9.12) Seja a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é par} \\ 0, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A função f é sobrejetora? injetora?

9.13) Seja a função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Calcule $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, f(1) e f(2). A função é injetora?

9.14) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$$

Resolva as equações f(x) = 1 e f(x) = – 1; conclua que f não é injetora e não é sobrejetora.

9.15) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em B, definida por:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

Determine B para que f seja sobrejetora

9.16) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_0\}$. Considere a função f, de A em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Determine o menor valor de x_0 para que f seja injetora.

9.17) Sejam os conjuntos A e B tais que $n_A = p$ e $n_B = q$, e seja f uma função de A em B. Qual condição p e q devem satisfazer para que f seja sobrejetora? Injetora? Bijetora?

9.18) Quantas são as funções sobrejetoras de A = {1; 2; 3} em B = {1; 2}?

9.19) Quantas são as funções injetoras de A = {1; 2} em B = {1; 2; 3}?

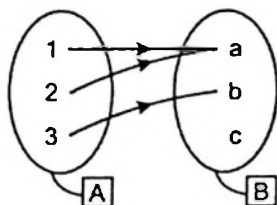
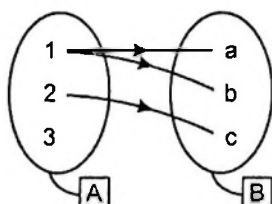
9.20) Quantas são as funções bijetoras de A = {1; 2; 3} em B = {1; 2; 3}?

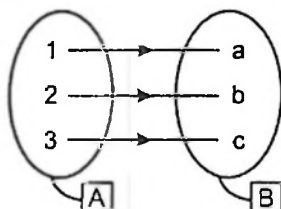
9.21) Sejam f e g funções de E em E. Mostre que se f e g são *sobrejetoras*, a função $g \circ f$ é *sobrejetora*.

9.5 – FUNÇÃO INVERSA

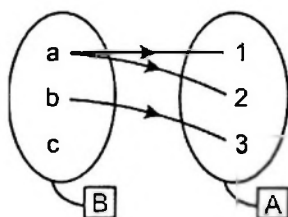
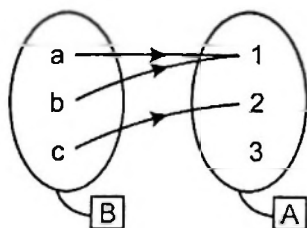
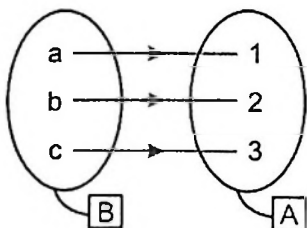
O Conceito

Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {a; b; c} e as relações de A en

$\mathfrak{R}_1 = \{(1; a), (2; a), (3; b)\}$

$\Re_2 = \{(1; a), (1; b), (2; c)\}$

$\Re_3 = \{(1; a), (2; b), (3; c)\}$

Observe que as relações $\Re_1$ e $\Re_3$ são *funções* de A em B; a relação $\Re_2$ não é.

Para cada uma das relações dadas podemos construir a sua *relação inversa*, de B em A:

$\Re_1^{-1} = \{(a; 1), (a; 2), (b; 3)\}$

$\Re_2^{-1} = \{(a; 1), (b; 1), (c; 2)\}$

$\Re_3^{-1} = \{(a; 1), (b; 2), (c; 3)\}$

Observe que a relação $\mathfrak{R}_1$ é função de A em B, mas a relação $\mathfrak{R}_1^{-1}$ não é função de B em A (por quê?). A relação $\mathfrak{R}_2$ não é função de A em B e a relação $\mathfrak{R}_2^{-1}$ não é função de B em A.

Entretanto, *a relação $\mathfrak{R}_3$ é função de A em B e a relação inversa $\mathfrak{R}_3^{-1}$, também, é função de B em A*. Observe que $\mathfrak{R}_3$ é função bijetora de A em B; e isto significa que para todo $y \in B$ existe um e um só $x \in A$ tal que $(y; x) \in \mathfrak{R}_3^{-1}$, isto é, $\mathfrak{R}_3^{-1}$ é função de B em A.

Note também que $D(\mathfrak{R}_3^{-1}) = I(\mathfrak{R}_3)$ e $I(\mathfrak{R}_3^{-1}) = D(\mathfrak{R}_3)$.

Teorema

Seja f uma função de A em B; a relação inversa f^{-1} é uma função de B em A se e somente se é uma função bijetora.

Demonstração:

1º) Vamos demonstrar que se f^{-1} é uma função de B em A então f é bijetora.

Seja y um elemento qualquer de B; então existe $x \in A$ tal que $(y; x) \in f^{-1}$, pois f^{-1} é função, e daí $(x; y) \in f$, isto é, f é sobrejetora.

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A, tais que $x_1 \neq x_2$. Note que se $f(x_1) = f(x_2) = y$ viria $f^{-1}_{(y)} = x_1$ e $f^{-1}_{(y)} = x_2$ contra a hipótese de que f^{-1} é função; então $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, isto é, f é injetora.

Logo f é bijetora.

2º) Vamos demonstrar que se f é bijetora, então f^{-1} é função de B em A.

Para todo y em B existe um elemento x em A tal que $(x; y) \in f$, pois f é sobrejetora. Então para todo y em B: $(y; x) \in f^{-1}$, isto é, todo y de B tem imagem x em A, dada por f^{-1}.

Supondo que um elemento $y \in B$ tenha as imagens x_1 e x_2 em A, dadas por f^{-1}, teremos: $(y; x_1) \in f^{-1}$ e $(y; x_2) \in f^{-1}$ e daí: $(x_1; y) \in f$ e $(x_2; y) \in f$, então $x_1 = x_2$, pois f é injetora.

Concluímos então que todo y de B possui uma e uma só imagem em A, dada por f^{-1} isto é, f^{-1} é função de B em A.

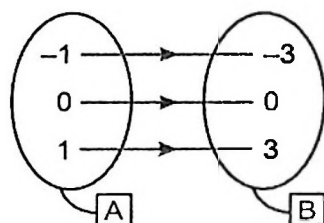
Definição

Seja f uma função **bijetora** de A em B, e seja f^{-1} sua relação inversa. O teorema anterior mostra que f^{-1} é uma função de B em A e que se denomina **função inversa** de f.

Diz-se que uma função é **invertível** se existe f^{-1}, isto é, se f é bijetora.

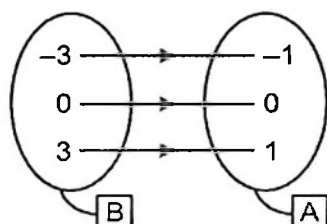
Exemplo

Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1}, B = {–3; 0; 3} e a função f, de A em B:

$$f = \{(-1; -3), (0; 0), (1; 3)\}$$

Note que f é bijetora, então f é invertível, isto é, existe f^{-1}. O domínio de f^{-1} é B e o seu contradomínio é A.

Os pares ordenados que pertencem a f^{-1} são obtidos dos pares ordenados que pertencem a f trocando-se, nestes, as coordenadas uma pela outra.

$$(-1; -3) \in f \text{ então } (-3; -1) \in f^{-1}$$
$$(0; 0) \in f \text{ então } (0; 0) \in f^{-1}$$
$$(1; 3) \in f \text{ então } (3; 1) \in f^{-1}$$

$f^{-1} = \{(-3; -1), (0; 0), (3; 1)\}$

Observações: Seja f uma função bijetora de A em B.

1º) Se $(x; y) \in f$ então $(y; x) \in f^{-1}$ e inversamente: note então a equivalência para as sentenças abertas:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2º) $D(f^{-1}) = I(f)$ e $I(f^{-1}) = D(f)$; note também que pois $I(f) = CD(f)$, pois é bijetora.

3º) Observe que a função f^{-1} é também bijetora e que:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

A Sentença que Define a Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B e seja $y = f(x)$ a sentença aberta que a define.

Da equivalência:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

concluímos que **a** função inversa, f^{-1}, de B em A, é definida pela sentença aberta $x = f^{-1}(y)$:

$$f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$
$$f^{-1} = \{(y; x) \in B \times A \mid x = f^{-1}(y)\}$$

Então, dada a sentença aberta que define a função f:

$$y = f(x)$$

para obtermos a sentença aberta que define a função inversa f^{-1} *expressamos x "em função" de y*:

$$x = f^{-1}(y)$$

Por exemplo, seja a função bijetora:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y = f(x) = x^3 \end{cases}$$

A função inversa, f^{-1}, é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, partimos da sentença aberta que define f:

$$y = x^3$$

expressando x "em função" de y:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Então, a sentença aberta que define a função f^{-1} é:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt[3]{x}\}$$

Como é comum representarmos a primeira coordenada de um par ordenado com a letra **x** e a segunda coordenada com a letra y, na sentença aberta $x = \sqrt[3]{y}$, que define f^{-1}, fazemos uma troca de letras: x por y e y por x; então:

$$f^{-1} = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{y}\}$$

Um Resumo

Dada a sentença aberta:

$$y = f(x)$$

que define a função bijetora f, se quisermos a sentença aberta que define a fu f^{-1}, procedemos da seguinte maneira:

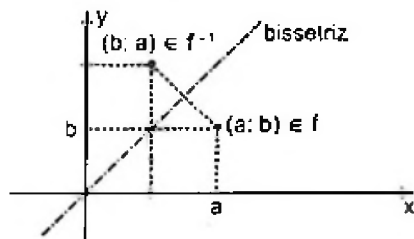
1° passo: na sentença $y = f(x)$, isola-se x no primeiro membro.

2° passo: troca-se a letra x pela letra y e a letra y pela letra x.

Uma Propriedade Geométrica

Seja f uma função bijetora, real e de variável real.

Se $(a; b) \in f$, então $(b; a) \in f^{-1}$.

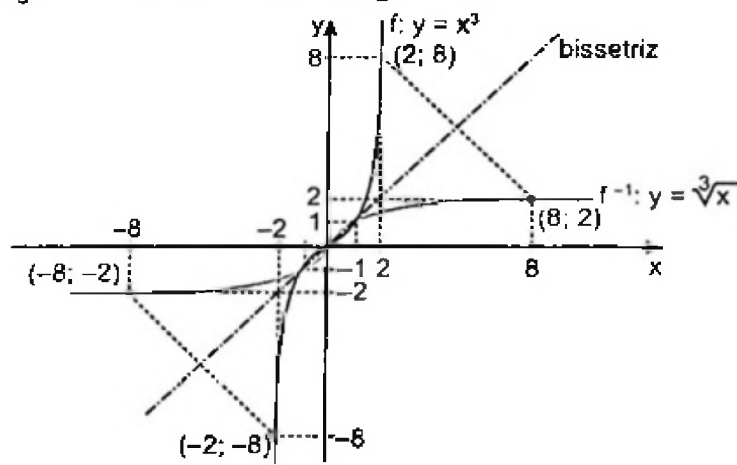
Num sistema ortogonal xOy, os pontos de coordenadas (a; b) e (b; a) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Aplicando o raciocinio para todos os pares que pertencem a f, podemos concluir que:

Os gráficos da função f e sua função inversa f^{-1} são simétricos à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

Seja a função bijetora: $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$

A função inversa de f é: $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$

Os gráficos de f e de f^{-1} estão na figura abaixo:

Exercícios Resolvidos

9.22) Seja a função f, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}.

Solução:

f é sobrejetora, pois todo $y \in \mathbb{R}^* = CD(f)$ é imagem de um $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^* = D(f)$.

f é injetora, pois para todo x_1, x_2 de $\mathbb{R}^* = D(f)$ tem-se:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}}_{f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Então, f é bijetora.
A sentença que define f^{-1} obtém-se da seguinte forma:

1º **passo:** isola-se x na sentença aberta que define f:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$xy = 1$$

$$x = \frac{1}{y}$$

2º **passo:** "trocam-se" as letras x e y:

$$y = \frac{1}{x}$$

Então: $\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Note que $f = f^{-1}$

9.23) Seja a função f definida por:

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}.

Solução:

Para verificarmos que f é bijetora vamos mostrar que para todo y, $y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, a equação:

$$\frac{x+2}{2x-3} = y$$

admite uma e uma só solução x, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Para

$x \neq \frac{3}{2}$: $\frac{x+2}{2x-3} = y \Leftrightarrow x + 2 = y(2x-3) \Leftrightarrow x(1-2y) = -2-3y \Leftrightarrow x = \frac{3y+2}{2y-1}$ (I)

Observe, então, que de (I) podemos concluir que para todo y, $y \neq \frac{1}{2}$, existe em correspondência um e um só x, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Concluímos que f é bijetora.

A sentença aberta que define f^{-1} obtém-se de (I), trocando-se as letras x e y:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

Então:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \\ f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1} \end{cases}$$

9.24) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}.

Solução:

Para verificarmos que f é bijetora vamos mostrar que para todo y, $y \in \mathbb{R}_+ = CD(f)$, a equação:

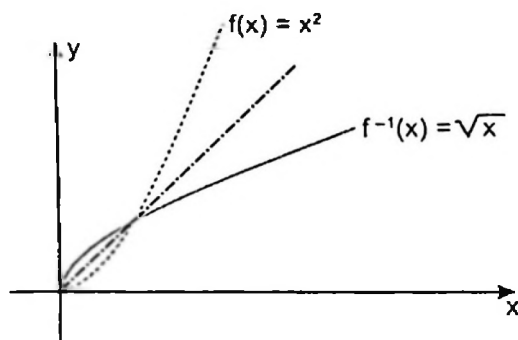
$$x^2 = y$$

admite uma e uma só solução x, $x \in \mathbb{R}_+ = D(f)$.

Para $x \geq 0$, a equação nos dá $x = \sqrt{y}$, e como $y \geq 0$, a solução existe e é única.

Então, f é bijetora.

A função inversa de f é definida por:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

9.25) A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x \cdot |x|$$

é bijetora. Determine f^{-1}. (Veja o exercício 9.3.)

Solução:

Para $y \geq 0$ tem-se: $y = f(x) = x\,|x| \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Para $y \leq 0$ tem-se: $y = f(x) = x\,|x| \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$.

A troca das letras x e y nos dá:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

9.26) Seja f uma função bijetora de E em E. Demonstre que:

$$f^{-1} \circ f = I_E \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_E$$

onde I_E é a função identidade de domínio E, isto é:

$$\begin{cases} I_E: E \to E \\ I_E(x) = x \end{cases}$$

Solução:

As funções compostas $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ são de E em E; além disso:

$$(f^{-1} \circ f)\ (x) = f^{-1}[\ f(x)] = f^{-1}(y) = x$$

$$(f \circ f^{-1})\ (y) = f\ [\ f^{-1}(y)] = f(x) = y$$

Ficam demonstradas as igualdades.

Exercícios Propostos

9.27) Seja a função polinômio do 1º grau:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0 \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora. Determine f^{-1}.

9.28) Para a função polinomial do 1º grau:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0 \end{cases}$$

determine a e b para que $f = f^{-1}$.

9.29) Verifique se cada uma das funções definidas abaixo é bijetora; em caso positivo, determine a função inversa:

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f: \mathbb{R}_+ \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\} \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \end{cases}$

9.30) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x - 5$$

a) Determine f^{-1}.
b) Calcule $(f \circ f^{-1})(x)$ e $f^{-1}[f(x)]$.

9.31) Uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \geq 0 \\ x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Determine f^{-1}.

9.32) Sejam as funções bijetoras f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = 4x + 3$$

Verifique que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

9.33) Seja a função f, bijetora, de $A = \mathbb{R} - \{5\}$ em $B = \mathbb{R} - \{m\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Determine m sabendo-se que a sentença aberta que define a função f^{-1} é:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - m}$$

9.34) Seja a função definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}, \quad a^2 + bc \neq 0$$

Determine $f^{-1}(x)$.
Por que a condição $a^2 + bc \neq 0$ é imposta?

9.35) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x + 1 + |x - 1|$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza se f é bijetora.
c) Em caso positivo dê f^{-1}.

Exercícios Suplementares

V.1) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, crescentes em $\mathbb{R}$. Verifique que a função $f + g$ é crescente em $\mathbb{R}$.

V.2) A função f, bijetora, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é crescente em $\mathbb{R}$. Verifique que f^{-1} é crescente em $\mathbb{R}$.

V.3) Se as funções:

$f: E \to F$

$g: F \to E$

são tais que $g \circ f = I_E$, então f é injetora e g é sobrejetora.

V.4) Uma função f, de E em F, é bijetora se e somente se existe uma função g, de F em E, tal que:

$$g \circ f = I_E \quad \text{e} \quad f \circ g = I_F, \quad \text{e} \quad g = f^{-1}$$

V.5) Sejam as funções bijetoras:

$f: E \to F$

$g: F \to G$

Mostre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

V.6) Um função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é tal que para todo a, $a \in \mathbb{R}$, e todo b, $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

a) Determine f(0).
b) Verifique que f é ímpar.
c) Se $f(1) = k$, determine f(n), $n \in \mathbb{N}^*$.

V.7) Uma função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, é tal que para todo a, $a \in \mathbb{R}$, e todo b, $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$$

O conjunto-imagem de f é $I(f) = \{-1; 1\}$.

a) Determine f(0).
b) Verifique que f é par.
c) Se $k \in \mathbb{Z}$ verifique que:

$$f(2k) = 1$$
$$f(1) = -1$$
$$f(2k + 1) = -1$$

V.8) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é tal que:

$$f(x + 5) = f(x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Determine $f\left(\frac{16}{3}\right)$, $f\left(\frac{29}{3}\right)$, $f(12) + f(-7)$.

V.9) Seja a função real e de variável real definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2(x + |x - 2|)}$$

a) Determine D(f).
b) Faça o gráfico de f.
e) Determine I(f).

V.10) As funções f e g satisfazem às condições:

$$f(x) = 2x + 1$$
$$g(2x - 1) = f(x - 1)$$

Determine g(x).

V.11) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, está assim definida:

1) $\forall x,\ x \in [0; 2],\ f(x) = x^3$
2) f é par
3) $f(x + 4) = f(x),\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}$

a) Dê a sentença aberta que define f para $x \in [-2; 2]$.
b) Gráfico de f se $x \in [-6; 6]$.
c) Resolva a equação $f(x) = 1$.
d) Determine I(f).

Capítulo 1

1.3) a, b, d, f

1.4) declarativas: c; e
abertas: a; b; d

1.7) a) V = {5}
b) V = {6; 7; 8; 9}
c) V = {6; 7; 8}
d) V = {2; −2}

1.8) a) V = {(10; 8), (5; 3), (2; 0)}
b) V = {(4; 5), (0; 1)}
c) V = {(4; 2; 3), (1; 0; 1)}

1.12) a) Salvador não fica na Bahia.
b) Pássaros não voam.
c) Salvador fica na Bahia e pássaros voam.
d) Salvador fica na Bahia ou pássaros voam.
e) Salvador fica na Bahia ou pássaros não voam.
Salvador não fica na Bahia e pássaros voam.
Não é verdade que Salvador fique na Bahia ou pássaros voem.
Não é verdade que Salvador fique na Bahia e pássaros voem.

a) $p \wedge q$
b) $\sim p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \wedge q)$
d) $\sim q \vee p$

1.18) a) $s \Rightarrow p$
b) $q \Rightarrow r$
c) $q \Rightarrow s$
d) $r \Rightarrow p$
e) $s \Rightarrow q$
f) $q \Rightarrow s$
g) $p \Rightarrow r$
h) $s \Rightarrow q$
i) $s \Leftrightarrow q$
j) $p \Leftrightarrow s$

1.19) a) V
b) V
c) F
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V
i) V
j) V
k) V
l) V

1.20) a)

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V

b)

p	q	r	p ∨ q	r ∧ p	(p ∨ q) ⇒ (r ∧ p)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

1.21) a) Há pelo menos um marciano que não usa camisola.
b) Há pelo menos um camelo que tem rabo.
c) Não há habitantes na Lua.

Capítulo 2

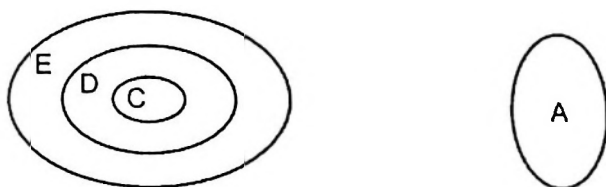
2.5) a) V b) F c) V d) F e) V f) F g) V h) F i) F j) F k) V l) F m) [illegible] n) V o) F

2.6) a) {0; 1; 2; 3; 4}
b) {2; 3; 4...}
c) {2; 3; 4}
d) {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2}
e) {–3; –2; –1; 1; 2; 3}
f) {–5; –4; –3; –2; –1; 0}
g) {5; 7}
h) {0; 3; 6; 9;...}
i) {1; 4; 7; 10...}
j) {1; 3; 5; 7...}
k) {5}
l) {∅}

gabarito correto e revisado ☺

2.12) a) V b) F c) F d) V e) F f) V g) F h) V i) F j) V k) F l) V m) V n) V o) F

2.13) Sejam:
E = conjunto das pessoas engraçadas
C = conjunto dos coelhos
A = conjunto das pessoas que sabem caçar borboletas
D = conjunto das pessoas que não sabem andar de bicicleta

O diagrama dos conjuntos é:

Assim, a resposta é d.

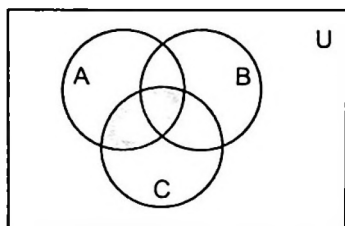
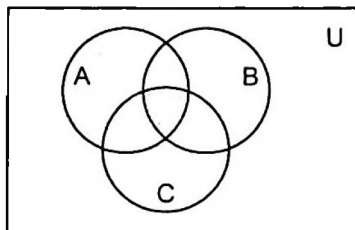
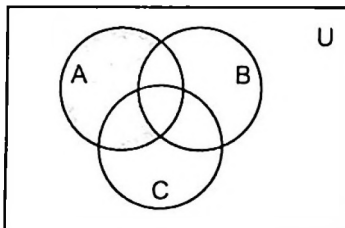
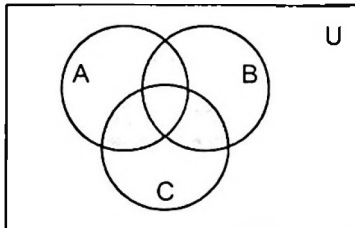
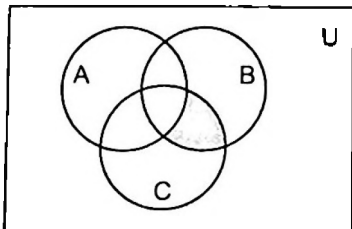
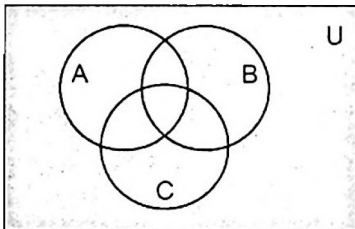
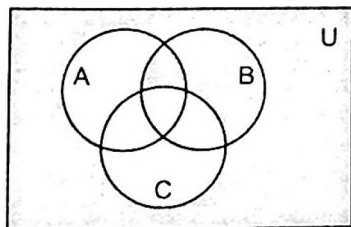
2.14) b

2.20)

a) {1; 3; 5; 7; 9; 4; 6}
b) {3}
c) {2; 3; 4; 6; 8; 10}
d) {1; 5; 4; 8; 6}
e) Ø
f) {2; 4; 6; 8; 10; 3; 1; 5}
g) {4}
h) {2; 8; 10}
i) {3}
j) {2; 3; 6; 7; 9; 10}
k) {2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10}
l) {1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

2.21) {4; 6; 7; 5; 9}

2.22)

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

2.23) c

2.24) a) F b) V c) V d) F e) V f) V g) F h) V i) F j) V k) V l) V

2.25) a) F b) V c) V d) F e) V f) V g) F h) V

2.29) a) 17 b) 30 c) 13

2.30) a) 70 b) 45 c) 30 d) 55 e) 7 f) 100

2.31) a) 16 b) 38 c) 32 d) 20

2.32) a) 500 b) 600 c) 400 d) 800 e) 1800 f) 1000

2.33) a) 40 b) 23 c) 43

2.38) a) V b) F c) F d) F e) F f) V g) V h) V i) F j) V k) V l) V m) F n) V

2.39) a) 16 b) 15

2.41) a) V b) V c) V d) V e) V f) V g) F h) F i) F j) F k) V l) V m) V n) V o) F p) F

2.42) a) [4; 9] b) [6; 7] c) [4; 6[d) [–3; 2] e)]9; 11[

2.43) a) [–1; 1[b) $\left[-3; \frac{5}{4}\right[$ c) ∅ d) $\left[-1; \frac{5}{4}\right[$

2.44) a) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ b) $\left]\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Capitulo 3

3.7) a) S = {3} c) S = {2}

b) $S = \{3\}$ d) $S = \left\{\frac{13}{5}\right\}$

3.8) a) $S = \varnothing$ b) $S = \mathbb{R}$

3.9) -13

3.14) a) $V = \left\{\frac{-8}{3}; \frac{9}{5}\right\}$ c) $V = \varnothing$

b) $V = \left\{\frac{3}{2}; 5; 3\right\}$ d) $V = \{10\}$

3.15) $V = \{4; 7\}$

3.16) a) $V = \varnothing$ d) $V = \varnothing$

b) $V = \{6\}$ e) $V = \left\{\frac{6}{5}\right\}$

c) $V = \{9\}$

3.21) a) $V = \{0; -1\}$ d) $V = \varnothing$

b) $V = \left\{-9; 4; \frac{3}{2}\right\}$ e) $V = \{0; 4; -4\}$

c) $V = \left\{\frac{4}{7}\right\}$ f) $V = \left\{-\frac{5}{4}; 1; -1\right\}$

3.22) a) $V = \left\{-\frac{1}{2}; 2; \pi\right\}$ c) $V = \{2\}$

b) $V = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

3.24) a) $V = \left\{\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right\}$ c) $V = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$

b) $V = \{2\}$ d) $V = \left\{\frac{13}{6}; \frac{5}{6}\right\}$

3.29) a) $V = \left\{\frac{a+b}{5}\right\}$ c) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 1, V = \left\{\frac{4a+1}{a-1}\right\} \\ \text{Se } a = 1, V = \varnothing \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2, V = \left\{\dfrac{15}{a-2}\right\} \\ \text{Se } a = 2, V = \varnothing \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 3, V = \left\{\dfrac{2b+8}{3-a}\right\} \\ \text{Se } a = 3 \text{ e } b \neq -4, V = \varnothing \\ \text{Se } a = 3 \text{ e } b = -4, V = \mathbb{R} \end{cases}$

3.35) a) $V = \left\{\left(\dfrac{11}{34}; \dfrac{-5}{34}\right)\right\}$ b) $V = \left\{\left(\dfrac{97}{29}; \dfrac{30}{29}\right)\right\}$

3.36) a) $V = \{(-2; 3; -4)\}$
b) $V = \{(5; -4; 2)\}$
c) $V = \left\{\left(-\dfrac{21}{4}; -\dfrac{11}{2}; 4\right)\right\}$

3.37) a) $V = \{(2; 3)\}$
b) $V = \left\{\left(\dfrac{7}{11}; \dfrac{70}{11}\right)\right\}$
c) $V = \left\{\left(\dfrac{13}{28}; \dfrac{39}{8}\right)\right\}$

3.45) a) $V = \left\{\left(1; -\dfrac{21}{4}\right)\right\}$
b) $V = \left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}$
c) $V = \left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)\right\}$
d) $V = \left\{\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}\right)\right\}$
e) $V = \{1; -3\}$
f) $V = \varnothing$

3.46) a) $V = \{0; 1\}$
b) $V = \{5; -5\}$
c) $V = \left\{\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$
d) $V = \varnothing$
e) $V = \left\{0; \dfrac{3}{2}\right\}$

3.47) a) $V = \{-1; 9\}$
b) $V = \{1\}$
c) $V = \{1+\sqrt{11}; 1-\sqrt{11}\}$
d) $V = \left\{\dfrac{1}{18}\right\}$
e) $V = \left\{4; \dfrac{11}{2}\right\}$
f) $V = \{0; -1\}$
g) $V = \{2; 4\}$
h) $V = \{4; -4\}$

3.48) a) $V = \left\{1; -1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$
f) $V = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{2}\right\}$

b) $V = \left\{\frac{1}{3}; \frac{-1}{3}\right\}$

c) $V = \varnothing$

d) $V = \{3; 1\}$

e) $V = \{0; 1\}$

g) $V = \{9; 4\}$

h) $V = \left\{\frac{-2}{7}; \frac{-1}{5}\right\}$

i) $V = \{-3; 4\}$

j) $V = \varnothing$

3.49) a) $V = \left\{0; 2; -2; \frac{5}{2}\right\}$

b) $V = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

c) $V = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

d) $V = \{3\}$

3.50) a) $V = \{-1;4\}$

b) $V = \left\{1; \frac{-5}{3}\right\}$

3.51) a) $S = \left\{(3; 4); \left(\frac{-7}{4}; \frac{-24}{5}\right)\right\}$

b) $S = \left\{\left(-6; \frac{-4}{3}\right); (-2; -4)\right\}$

c) $S = \{4; 2;); (-2; 4)\}$

d) $S = \{(-1; 1)\}$

e) $S = \varnothing$

3.58) $\frac{52}{15}$

3.59) $\frac{109}{2}$

3.60) a) $\frac{11}{15}$ b) impossível c) $\frac{1}{2}$

3.61) $\frac{43}{9}$

3.62) a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

d) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$

3.63) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3.64) a) $(x - 3)(x + 6)$

b) $(2x - 3)(x + 5)$

c) $(2x + 3)^2$

d) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$

e) $(x + 1)(x - 1)(3x + 1)(3x - 1)$

f) $(x^2 + 4)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

4.11) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2}\right\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

f) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-1}{22}\right\}$

4.12) a) $V =]-6; 3[$

b) $V = \mathbb{R}$

c) $V = \left]\frac{-2}{9}; \frac{8}{9}\right[$

d) $V = \varnothing$

e) $V = \left]\frac{28}{5}; +\infty\right[$

4.13) a) $k > \frac{-25}{72}$

b) $k = \frac{-25}{72}$

c) $k \geq \frac{-25}{72}$

d) $k < \frac{-25}{72}$

4.18) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{3}\right\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee 2 \leq x < 5\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \vee x > \frac{23}{6}\right\}$

4.19) $V =]1; 2[$

4.20) $V =]\frac{2}{3}; 1]$

4.30) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 8\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 8\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > 8\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 8\}$

e) $V = \mathbb{R} - 3$

f) $V = \mathbb{R}$

g) $V = \varnothing$

h) $V = \{3\}$

i) $V = \mathbb{R}$

j) $V = \mathbb{R}$

k) $V = \varnothing$

l) $V = \varnothing$

m) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \vee x > 3\}$

n) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

o) $V = [-1; +1]$

p) $V = [0; 4]$

q) $V = \left]\frac{3-\sqrt{10}}{2}; \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right[$

4.31) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 2\}$ b) $V = [-2; 2]$

4.32) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee 3 < x < 4 \vee x \geq 5\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4 \wedge x \neq 2\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1 \wedge x \neq 0\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \vee 3 \leq x < 6\}$

4.33) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \vee 1 - \sqrt{11} < x < 1 + \sqrt{11}\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \vee x \geq 13\}$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \vee -\dfrac{1}{3} \leq x < 3 \vee x \geq 9\right\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1 \vee x \geq \dfrac{9}{5}\right\}$

4.34) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3 \vee 4 \leq x < 8\}$

b) $V = \left[3; \dfrac{7}{2}\right[$

4.35) $6 - \sqrt{35} < p < 6 + \sqrt{35}$

4.36) $-1 - 4\sqrt{2} < k < -1 + 4\sqrt{2}$

4.37) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \vee x > 3\}$

4.40)

a) F	d) F	g) V	j) V
b) V	e) F	h) V	k) V
c) V	f) V	i) V	

4.41) $$\left.\begin{array}{r} a > b \\ x > y \\ b + y > z \end{array}\right| \Rightarrow a + x + b + y > b + y + z \Rightarrow a + x > z \Rightarrow a > z - x$$

4.42) $\sqrt{2} + \sqrt{8} < \sqrt{3} + \sqrt{7} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{8} + 8 < 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + 7 \Leftrightarrow \sqrt{16} < \sqrt{21} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 < 21$

Como $16 < 21$ é verdadeira, o mesmo se dá com a sentença inicial.

4.43) a) $a^2 + b^2 > 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0\ (a - b)^2 \geq 0$

Como a sentença $(a - b)^2 \geq 0$ é verdadeira, o mesmo se dá com a sentença original.

b) Usando o resultado do item anterior temos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2 \geq 2ab \\ a^2+c^2 \geq 2ac \\ b^2+c^2 \geq 2bc \end{array}\right| \Rightarrow a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2ac+2bc \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2(ab+ac+bc) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

4.44)
$$\left.\begin{array}{l} a<b \Leftrightarrow a+a<a+b \Leftrightarrow 2a<a+b \Leftrightarrow a<\dfrac{a+b}{2} \\ a<b \Leftrightarrow a+b<b+b \Leftrightarrow a+b<2b \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2}<b \end{array}\right| \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$$

4.45) Como a e b são positivos e $a < b$ temos:

$$\left.\begin{array}{r} a<b \Leftrightarrow a\cdot a<b\cdot a \Leftrightarrow a^2<ab \Leftrightarrow a<\sqrt{ab} \\ a<b \Leftrightarrow ab<b^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}<b \end{array}\right\} \Rightarrow a<\sqrt{ab}<b$$

4.46) Sendo $0 < a < b$ temos:

(I) $a<\dfrac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow a(a+b)<2ab \Leftrightarrow a^2+ab<2ab \Leftrightarrow a^2<ab \Leftrightarrow a<b$

Como $a<b$ é verdade, $a<\dfrac{2ab}{a+b}$ também é verdade.

(II) $\dfrac{2ab}{a+b}<b \Leftrightarrow 2ab<b(a+b) \Leftrightarrow 2ab<ab+b^2 \Leftrightarrow ab<b^2 \Leftrightarrow a<b$

Como $a<b$ é verdade, $\dfrac{2ab}{a+b}<b$ também é verdade.

De (I) e (II) temos:

$$a<\frac{2ab}{a+b}<b$$

4.47) Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$ temos:

(I) $\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}<ab \Leftrightarrow \dfrac{4ab}{(a+b)^2}<1 \Leftrightarrow 4ab<(a+b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4ab<a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0<a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow 0<(a-b)^2$

Como $0<(a-b)^2$ é verdade, $\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$ também é.

(II) $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}<a+b \Leftrightarrow 4ab<(a+b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4ab<a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0<a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow 0<(a-b)^2$

Como $0<(a-b)^2$ é verdade, $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$ também é.

De (I) e (II) vem: $\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$.

4.51) a) 4 b) 4 c) 2 d) 5 e) 6 f) –9

4.52) a) V b) V c) V d) F e) V f) V g) V h) V i) V

4.53) a) V = {7; –7} b) V = ∅ c) V = {0}

4.62) a) V = {17; –1}

b) $V = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$

c) $V = \left\{\frac{7}{3}; \frac{13}{6}\right\}$

d) $V = \left\{\frac{25}{4}; \frac{-1}{4}\right\}$

e) $V = \left\{\frac{-7}{5}; \frac{-17}{3}\right\}$

f) V = {2; –2}

g) $V = \left\{2; 3; \frac{3+\sqrt{33}}{2}; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right\}$

h) $V = \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{5}{3}\right\}$

i) $V = \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$

j) V = ∅

4.63) a) V = {4; –4} b) V = {0; 6}

4.64) a) $V = \left\{\frac{-1}{9}\right\}$

b) V = ∅

c) V = {6}

4.65) a) $V = \left\{1; \frac{-9}{5}\right\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -4\}$

c) V = {28; –2}

4.66) a) $V = \left\{(6; 11); \left(\frac{-2}{7}; \frac{11}{7}\right)\right\}$

4.72) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6 \lor x < -6\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6 \lor x \leq -6\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 6\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6\}$

e) $V = \mathbb{R}$

f) $V = \mathbb{R}$

g) V = ∅

h) V = ∅

4.73) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3} \lor x < 1\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{7}{3} \lor x \leq 1\right\}$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{7}{3}\right\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{7}{3}\right\}$

e) $V = \mathbb{R}$

f) $V = \mathbb{R}$

g) $V = \varnothing$

h) $V = \varnothing$

i) $V = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$

j) $V = \mathbb{R}$

k) $V = \varnothing$

l) $V = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

4.74) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x > 9\}$

b) $V = \left]\frac{-47}{15}; \frac{-11}{5}\right[$

c) $V = \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$

d) $V = [-2; 5]$

4.75) a) $V =]-4; 4[$

b) $V =]2; 5[$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq \frac{7}{2}\right\}$

4.76) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \vee 4 < x < 6 \vee x > 6\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \vee x \geq 4 \vee x = 2\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6 \wedge x \neq 2\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 2 \wedge x \neq -2\}$

4.79) a) $\left.\begin{array}{l} |x-y| = |x+(-y)| \\ \text{Por } M_{14} \text{ temos } |x+(-y)| \leq |x|+|-y| \end{array}\right\} \Rightarrow |x-y| \leq |x|+|-y| \Rightarrow |x-y| \leq |x|+|y|$

b) $\left.\begin{array}{l} |x| = |y-(y-x)| \\ |y-(y-x)| \leq |y|+|y-x| \end{array}\right\} \Rightarrow |x| \leq |y|+|y-x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |y-x| \geq |x|-|y| \Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y|$

c) $|x+y| = |x-(-y)| \geq |x|-|-y| = |x|-|y| \therefore |x+y| \geq |x|-|y|$

4.80)

$$\left.\begin{array}{l}|x+y+z| = |(x+y)+z| \\ |(x+y)+z| \le |x+y|+|z|\end{array}\right\} \Rightarrow |x+y+z| \le |x+y|+|z|$$

$$\oplus\begin{cases}|x+y+z| \le |x+y|+|z| \\ |x+y| \le |x|+|y|\end{cases}$$

$$\overline{|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|}$$

4.81) $|(x+y)-(a+b)| = |x+y-a-b| = |(x-a)+(y-b)| \le |x-a| + |y-b|$

$$\oplus\begin{cases}|(x+y)-(a+b)| \le |x-a|+|y-b| \\ |x-a| < k \\ |y-b| < k\end{cases}$$

$$\overline{|(x+y)-(a+b)| \le 2k}$$

Capitulo 5

5.4) a) $x = \dfrac{42}{11}$ e $y = \dfrac{168}{11}$ b) $x = 11$ e $y = 6$

5.5) a) $(0;\ 0)$, $(a;\ b)$ b) $\alpha = \left(\dfrac{1}{2};\ -1\right)$

5.6) Da hipótese: $\{\{a\};\ \{a;\ b\}\} = \{\{b\};\ \{b;\ a\}\}$, como $\{a;\ b\} = \{b;\ a\}$ segue-se que $\{a\} = \{b\}$ e daí $a = b$; se $\{a\} = \{b;\ a\}$ também $a = b$.

5.11) a) {(3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 3), (5; 4), (5; 5)}
b) {(3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3)}
c) {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)}
d) {(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 3), (3; 4), (3; 5)}
e) {(3; 3)}
f) {(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3)}
g) {(1; 3), (2; 3), (3; 3), (4; 3), (5; 3)}

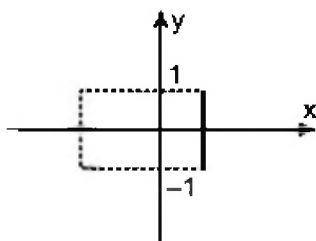
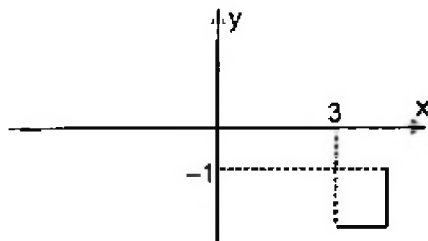
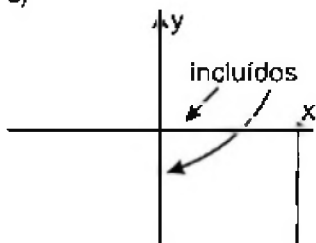
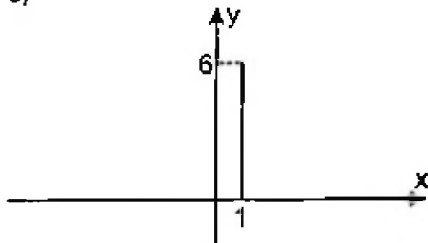
5.13) a) n^2
b) m^2
c) $n \cdot m$
d) n
e) $m^2 - m$

5.14) $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 4\}$

5.16) a)

b)

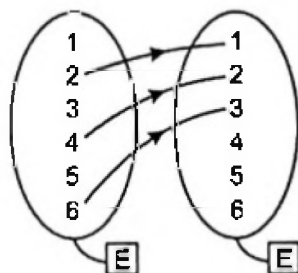
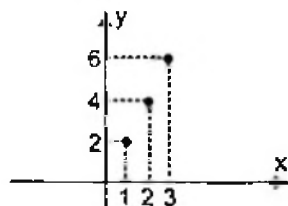
c)

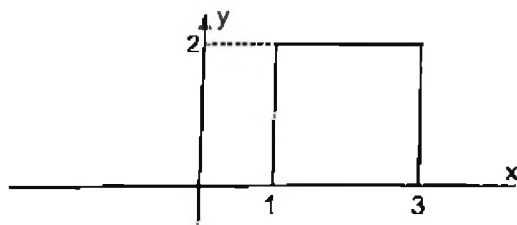
d)

5.20) a) F
b) V
c) V
d) F

5.21) $D(\mathfrak{R}) = \{x\}$, $I(\mathfrak{R}) = B$

5.22) $2^{m \cdot n}$

5.26) a) $\{(2; 1), (4; 2), (6; 3)\}$

b)

c)

5.27) a) $\{(-1; -1), (0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$
b) $D(\mathfrak{R}) = \{-1; 0; 1; 2; 3\} = I(\mathfrak{R})$
c) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y \wedge -1 \leq x \leq 3 \wedge -1 \leq y \leq 3\}$

5.28)

5.29) a) {(5; 0), (3; 4), (4; 3), (0; 5), (−3; 4), (−4; 3), (0; 5), (−4; −3), (−3; −4), (0; −5), (3; −4), (4; −3)}

b) $D(\Re) = \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\} = I(\Re)$

c) É o conjunto constituído por 12 pontos sobre uma circunferência de centro na origem e raio 5.

5.30) $\Re_1 = \{(1; \{1; 2\}), (2; \{1; 2\}), (1; \{1; 2; 3\}), (2; \{1; 2; 3\}), (3; \{1; 2; 3\})\}$

$\Re_2 = \{(\{1; 2\}; \{1; 2\}); (\{1; 2\}; \{1; 2; 3\}); (\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 3\})\}$

5.36) $\Re_3$ e $\Re_5$

5.37) $\Re_2$, $\Re_4$ e $\Re_5$

5.38) $\Re_1$, $\Re_3$, $\Re_4$ e $\Re_5$

5.39) $\Re_2$

5.40) sim

5.41) não ($x < x$ é falso)

5.42) sim

5.43) sim

5.44) a) 1º) $\Re = \{(-1; -2), (0; 0), (1; 2)\}$

2º) $D(\Re) = \{-1; 0; 1\}$; $I(\Re) = \{-2; 0; 2\}$

3º) $\Re^{-1} = \{(-2; -1), (0; 0), (2; 1)\}$

$\Re^{-1} = \{(x; y) \in A^2 \mid x = 2y\}$

b) 1º) $\Re = \{(-1; -2), (0; -1), (1; 0), (2; 1), (3; 2)\}$

2º) $D(\Re) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; $I(\Re) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

3º) $\Re^{-1} = \{(-2; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3)\}$

$\Re^{-1} = \{(x; y) \in A^2 \mid y = 2x\}$

c) 1º) $\Re = \{(-2; -1), (-1; -2), (1; 2), (2; 1)\}$

2º) $D(\Re) = \{-2; -1; 1; 2\} = I(\Re)$

3º) $\Re^{-1} = \Re$

5.45) a) $\Re^{-1} = A \times A$ e $\Re' = \varnothing$

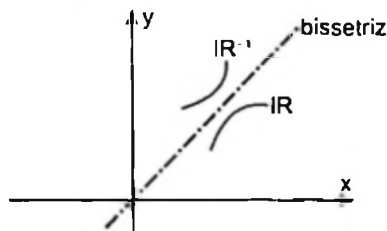
b) $\Re^{-1} = \varnothing$ e $\Re' = A \times A$

c) $\Re$

5.47)

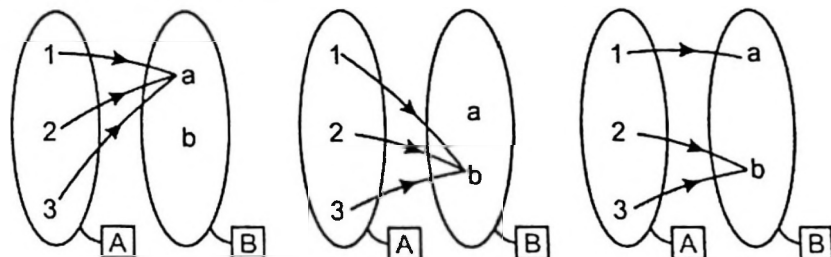
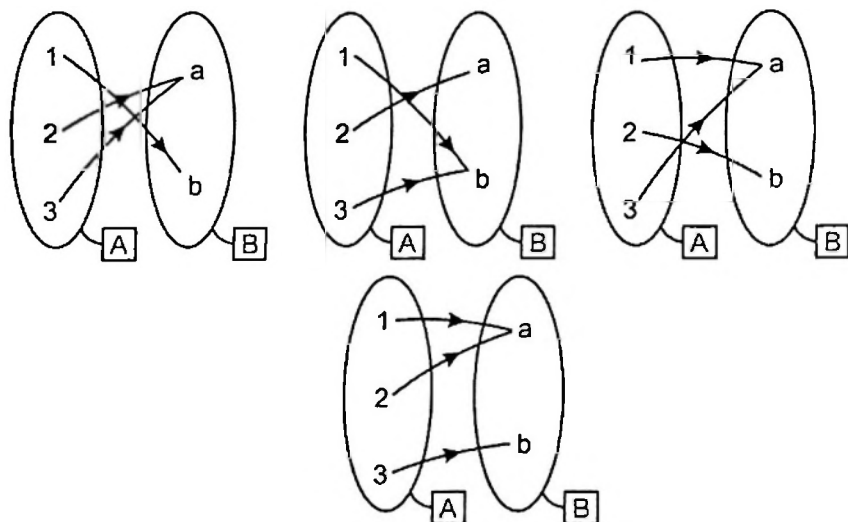
a) sim

b) med($\overline{AC}$) = med($\overline{BC}$)

c) O gráfico de $\Re^{-1}$ é simétrico ao gráfico de $\Re$ com relação à bissetriz:

5.48) Devemos provar que se (a; b) $\in \Re_1 \cup \Re_2$ então (b; a) $\in \Re_1 \cup \Re_2$.
Se (a; b) $\in \Re_1 \cup \Re_2$ então (a; b) $\in \Re_1$ ou (a; b) $\in \Re_2$ e como $\in \Re_1$ e $\Re_2$ são simétricas: (b; a) $\in \Re_1$ ou (b; a) $\in \Re_2$ e daí (b; a) $\in \Re_1 \cup \Re_2$.

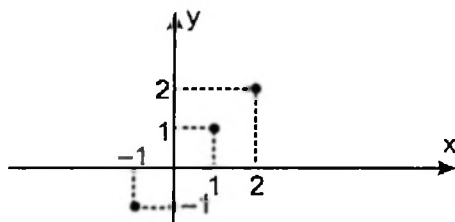
5.52) a e c

5.53) a) A
b) {0; 1; 4}
c) 4
d) 1
e) −2; 2
f) 0; 1

5.54)

Em nosso curso de Análise Combinatória está demonstrado que se um conjunto A possui **m** elementos e um conjunto B possui **p** elementos, o número de funções de A em B é dado por p^m.

5.55) a) F b) F c) V d) V
e) V

5.56) sim; todo x de A tem imagem x.

5.61) a) {(–1; –1), (0; –1), (1; 1), (2; 2)}
b) {–1; 1; 2}
c) {–1; 1; 2}
d)

5.62) {0}

5.63) a) 1 b) 0 c) 0 d) 1

5.64) 0, –1

5.65) sim

5.66) não

6.4) a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} - \{1; 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

6.5) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

6.6) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq 0\}$
b) $\{1\}$
c) $\mathbb{R}$

6.7) a) $\mathbb{R}_+$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\{0\}$

6.8) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
b) $\mathbb{R}^*_-$
c) $\mathbb{R}^*_+$

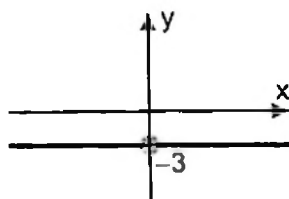
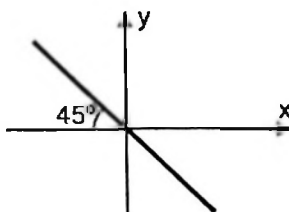
6.9) a) $\{1\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $\mathbb{R}$ (convenção)

6.10) $a' = 0$; $D(f) = \mathbb{R}$; $a > 0$: $D(f) = \mathbb{R}_-$; $a < 0$, $D(f) = \mathbb{R}_+$

6.11) $m = 3$

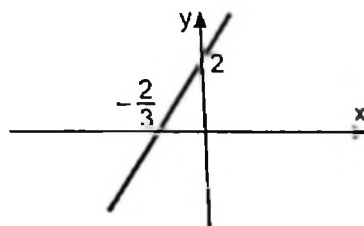
6.14) a e d

6.15) a) $D(f) = [-2; 3]$; $I(f) = [-3; 2]$
b) -2; 2; 0; -3; 0
c) $\{-1; 1; 3\}$
d) $[-2; -1[\cup]1; 3[$

6.21) a)

$D(f) = \mathbb{R}$, $I(f) = \{-3\}$

b) $D(f) = \mathbb{R}$, $I(f) = \{0\}$
O gráfico é o eixo Ox

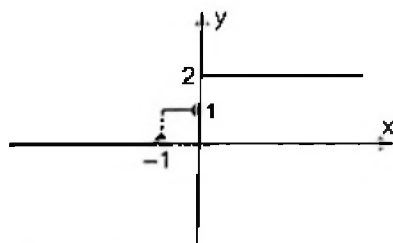
c)

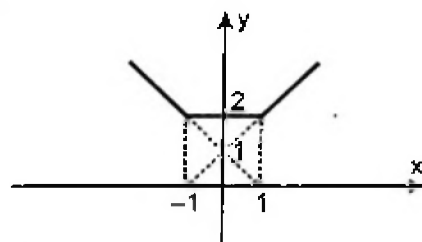
$D(f) = I(f) = \mathbb{R}$

d)

$D(f) = I(f) = \mathbb{R}$

6.22) (−2; −7)

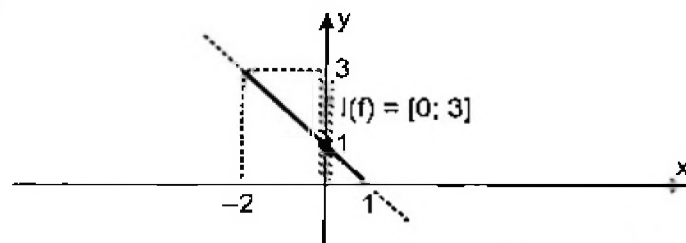
6.23) a) 0; 1; 2; 2

b)

c) $I(f) = \{0; 1; 2\}$

6.24) a)

$I(f) = [2; +\infty[$

6.25) a) $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$

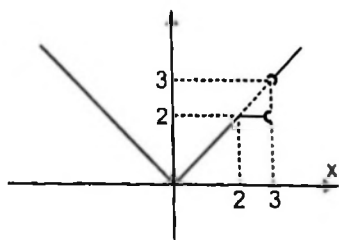
6.26) $m = 1$: não há ponto fixo; $m \neq 1$: o ponto fixo é $x = \frac{-1}{m-1}$

6.27)

6.28) a) $\varnothing$ b) $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

6.36) a) $m < -1$ ou $m > 1$ b) $-1 < m < 1$

6.44) Para que $f(x) = x$ deve-se ter $x \geq 0$: são seus pontos-fixos.
O zero da função é $x = 0$.

6.45) a) 2; 2; 2; π

b)

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$; $I(f) = \mathbb{R}_+$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

6.46) a)

$I(f) = \mathbb{R}_+$

b)

$I(f) = \mathbb{R}_+$

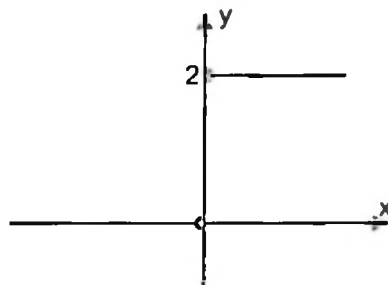
c)

$I(f) = \mathbb{R}_+$

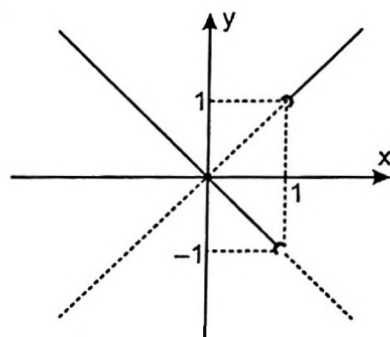
d)

$I(f) = [-2; +\infty[$

6.47) a)

$x \geq 0$: $f(x) = x$
$x \leq 0$: $f(x) = 0$
$D(f) = \mathbb{R}$; $I(f) = \mathbb{R}_+$

b)

$x > 0$: $f(x) = 2$
$x < 0$: $f(x) = 0$
$D(f) = \mathbb{R}^*$; $I(f) = \{0; 2\}$

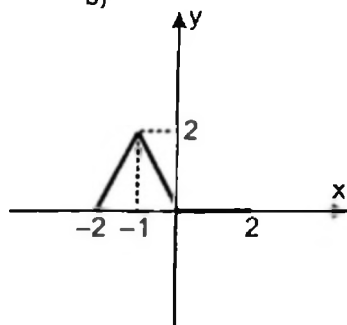
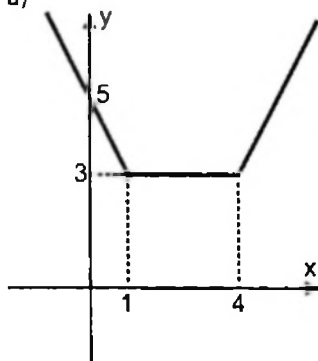
c)

$x > 1$; $f(x) = x$
$x < 1$; $f(x) = -x$
$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $I(f) =]-1; +\infty[$

6.48) a) $[-2; 2]$

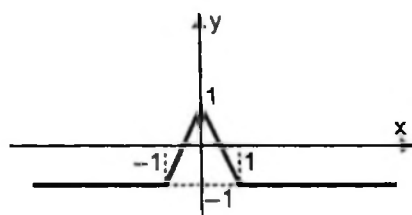
b)

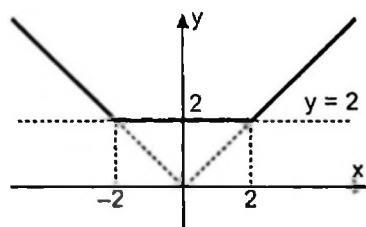
$f(x) \geq 0$; $g(x) = f(x)$
$f(x) < 0$; $g(x) = 0$

c) $I(g) = [0; 2]$

d) $[-2; 0]$

6.49) a)

b) $I(f) = [3; +\infty[$

6.50) a)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)		-1	-1	$2x + 1$	1	$-2x + 1$	-1	-1	

b) $I(f) = [-1; 1]$

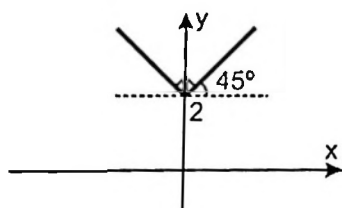
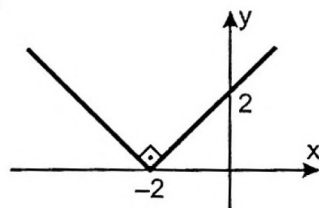
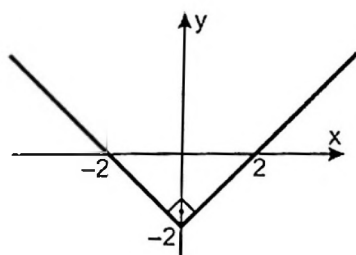
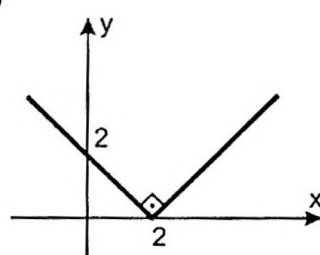
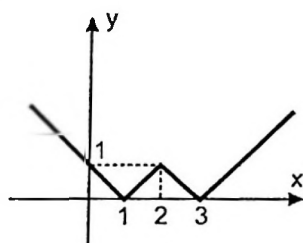
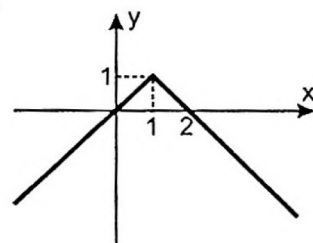
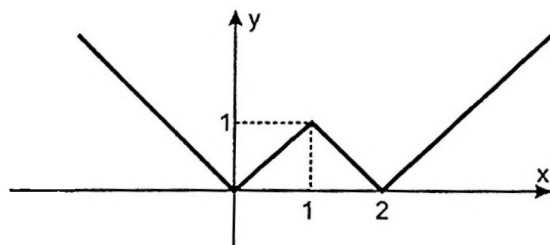
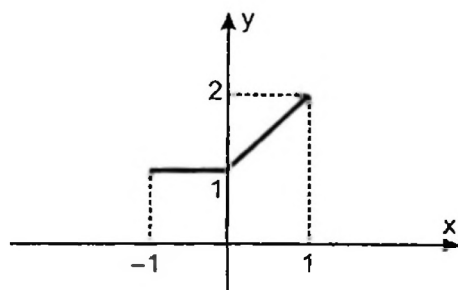
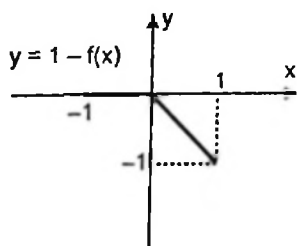
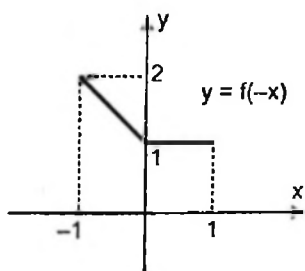
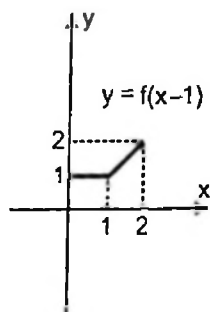
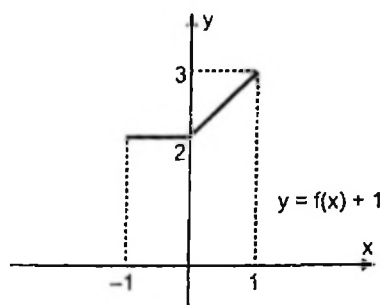
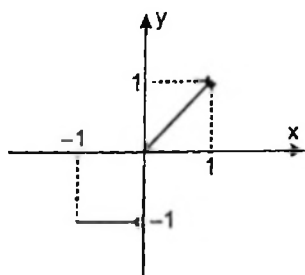
6.51)

$I(f) = [2; +\infty[$

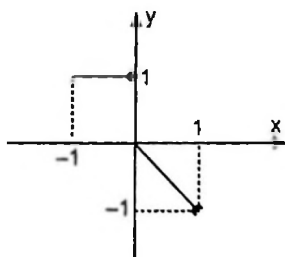
desenhe $y = 2$ e $y = |x|$ e considere a curva que está "por cima".

6.54) a)
y
45°
2
x
b)
y
2
x
−2
c)
y
x
−2
2
−2
d)
y
2
x
2
6.55) a)
y
1
x
1
2
3
b)
y
1
x
1
2
c)
y
1
x
1
2
6.56) a)
y
2
1
x
−1
1

b) D(f) = [−1; 1]
I(f) = [1; 2]

c)

y = f(−x)

6.57) a)

b) D(f) = [−1; 1[
I(f) = [0; 1[∪ {−1}

c)

d) $[0; 1[\cup \{-1\}$

e) $S = D(f)$

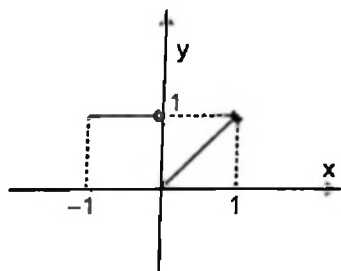
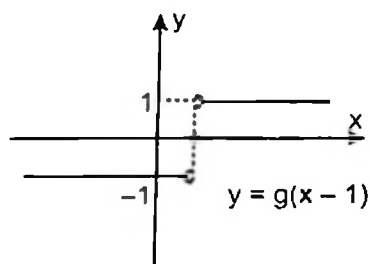
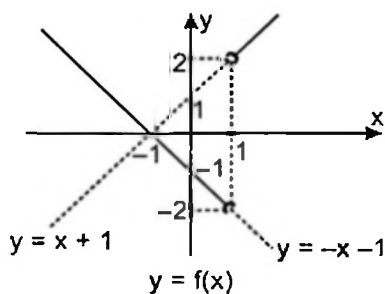
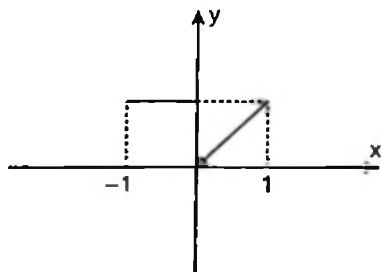
f)

g) $S = [-1; 0[$

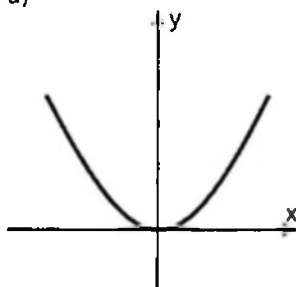
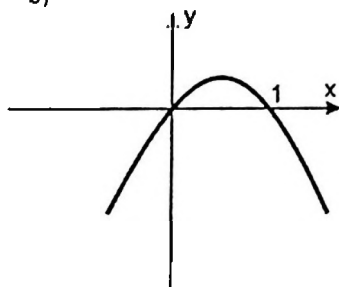
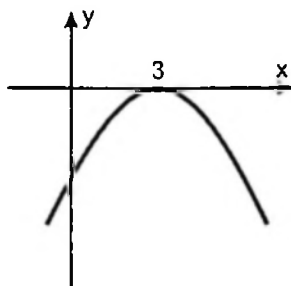
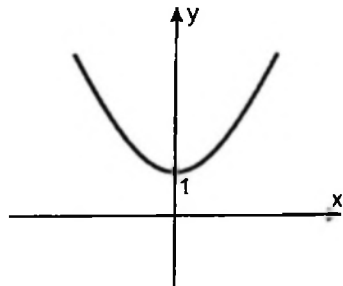
6.58)

y = x + 1

y = −x −1

y = f(x)

$x > 1$: $f(x) = x + 1$
$x = 1$: $f(x) = 0$
$x < 1$: $f(x) = -x - 1$

6.59)

6.62) a) $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$
b) $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$
c) $a = -2$, $b = -6$, $c = 0$
d) $a = 1$, $b = c = 0$

6.63) $-1; -1; 1$

6.64) a)

b)

c)

d)

6.70) $m < -4$ ou $m > 4$

6.71) a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $0; -\frac{1}{4}$

c) não há zeros

d) 0

e) 1 e 3

f) 3

g) não há zeros

6.72) a) 1 e 5
b) 1
c) não há ponto fixo

6.73) $k \leq -2$ ou $k \geq 2$

6.74) $k = 0$ ou $k = 1$

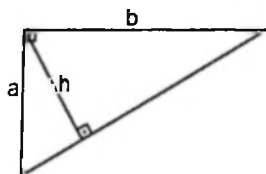
6.75) $-3 < k < 3$

6.76) $m = 0$: 1 ponto fixo $x = 1$

$m = \frac{1}{4}$: 1 ponto fixo $x = 2$

$m < \frac{1}{4}$: não há ponto fixo

$m > \frac{1}{4}$: 2 ponto fixos

6.77)

(sugestão: calcule Δ e use a relação $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = a \cdot b$)

6.78) Note que. $|f(x)| = f(x)$, se $f(x) \geq 0$ e daí $S = [5; 6]$

6.79) b) $b \neq 0$: $S = \{0\}$
$b = 0$: $S = \mathbb{R} - \{1; -1\}$

6.89) a) em $x = 2$, $ym = -4$
b) em $x = 2$, $y_M = 5$
c) em $x = -5$, $y_m = -33$
d) em $x = 0$, $y_m = 1$
e) em $x = 0$, $y_M = 0$

6.90) $m = 4$

6.91) $m = -1$

6.92) (sugestão: $\frac{-b}{2a} = -2$ em $m - 1 < 0$) $m = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

6.93) $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$

6.94) $b = -2$ e $c = 3$

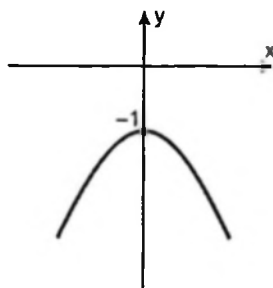
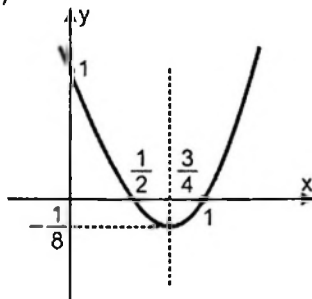
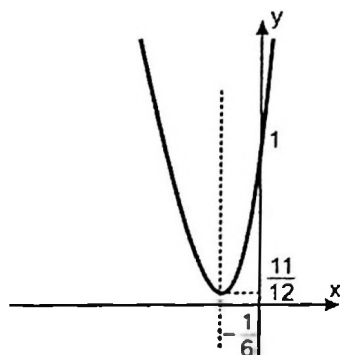
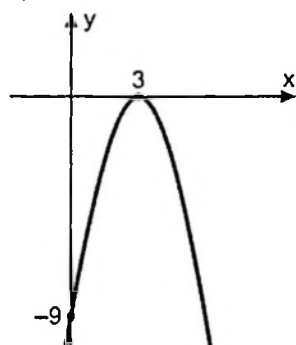
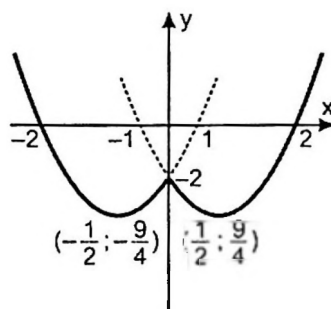
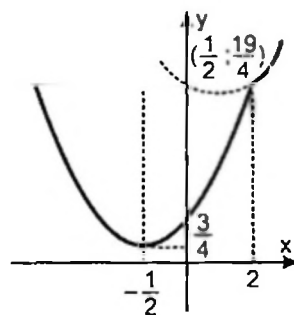
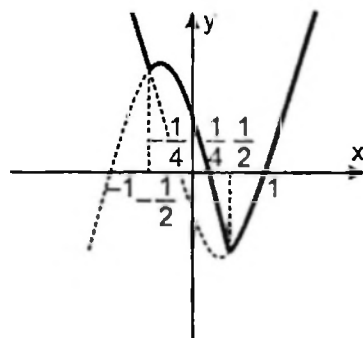
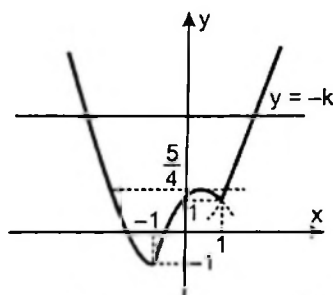
6.95) (2; 4) e (−1; 2)

6.96) $\frac{A^2}{4}$

6.97) $x = y = 4$

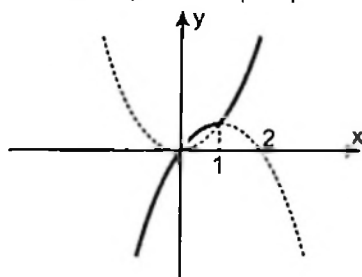
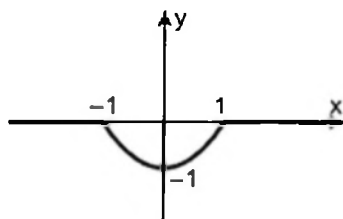
6.99) 100

6.100) $m = 1$

6.101) a)

b)

c)

6.102)

6.103)

6.104)

6.105)

$k < -\frac{5}{4}$: 2 soluções; $k = -\frac{5}{4}$: 3 soluções; $-\frac{5}{4} < k < -1$: 4 soluções

$k = -1$: 3 soluções; $-1 < k < 1$: 2 soluções; $k = 1$: 1 solução

$k > 1$: nenhuma solução

6.106) Note que: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

6.107)

6.108) $a > 0$; $x_V = \frac{b}{2a} \Rightarrow b > 0$; $c < 0$; $b^2 - 4ac > 0$; $a - b + c > 0$ (faça x = 1 e note que $f(1) > 0$); $a + b + c > 0$; $a - 2b + 4c = 0$

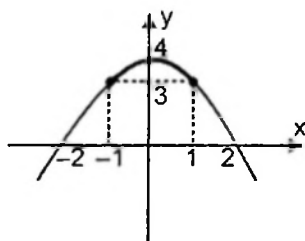
6.109)

$I(f) = [3; 4]$

6.110) a) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

d) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

b) $\mathbb{R}_-$

e) $[8; +\infty[$

c) $\left]-\infty; \frac{25}{12}\right]$

f) $\mathbb{R}_-$

6.111) $\frac{7}{16}$

6.112) $a > 0$; $\ell < 0$, $b^2 - ac < 0$; $m^2 - \ell n > 0$; $\ell b^2 - 2mab + na^2 > 0$

6.113) $-2 < m < 2$

6.117) a) $x_1 < 1 < x_2$

c) $x_1 < x_2 < 6$

b) $x_1 < x_2 < 3$

d) $3 < x_1 < x_2$

6.118) $0 < m < 4$

6.119) $m \geq \frac{11}{9}$

6.120) $2\sqrt{2} \leq m < \frac{11}{9}$

6.121) $a < -2$

6.122) $m < 0$, $-1 < x_1 < 1 < 2 < x_2 < 3$
$0 < m < 1$: $-1 < 1 < x_1 < 2 < 3 < x_2$
$1 < m$, $x_1 < -1 < 1 < x_2 < 2 < 3$

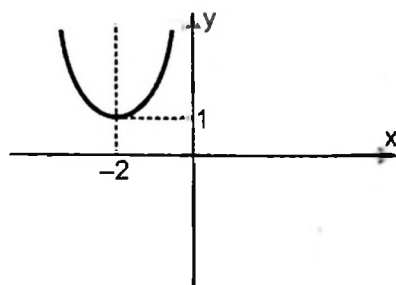
6.123) $p < x_1 < q < x_2 < r$

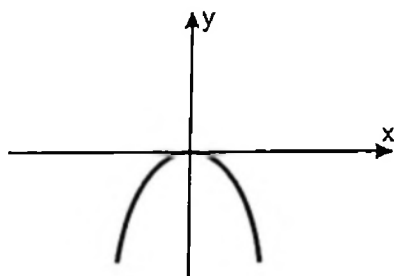
6.124) $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \xrightarrow{a^2 > 0} a^2 f(\alpha) f(\beta) < 0 \Rightarrow [af(\alpha)] \cdot [af(\beta)] < 0 \ldots$

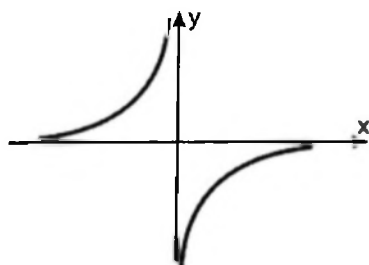
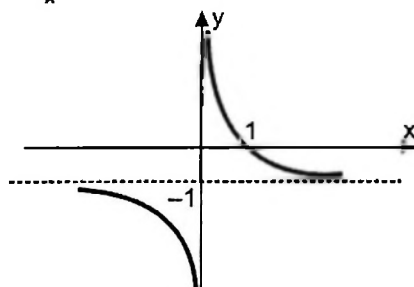
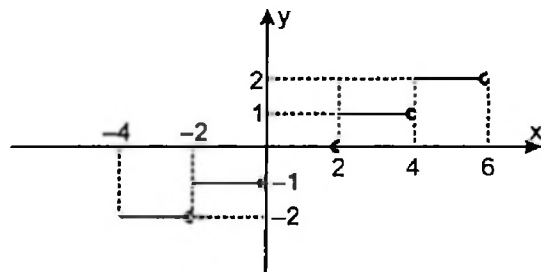
6.125) $0 < a < \frac{1}{2}$

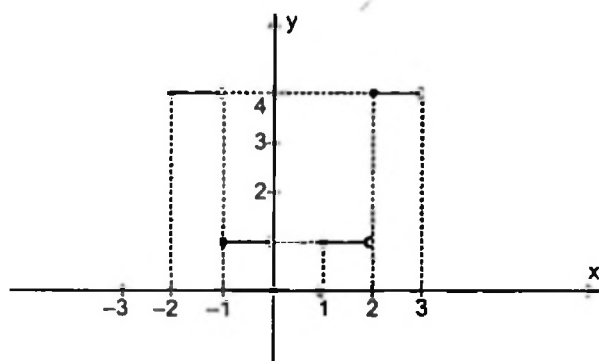
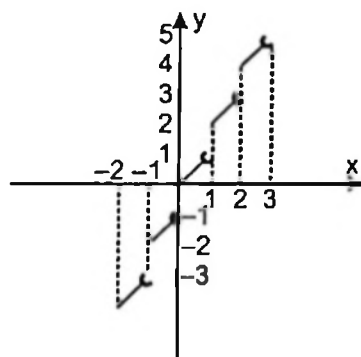
6.129) a) $a > 0$

b) $a < 0$

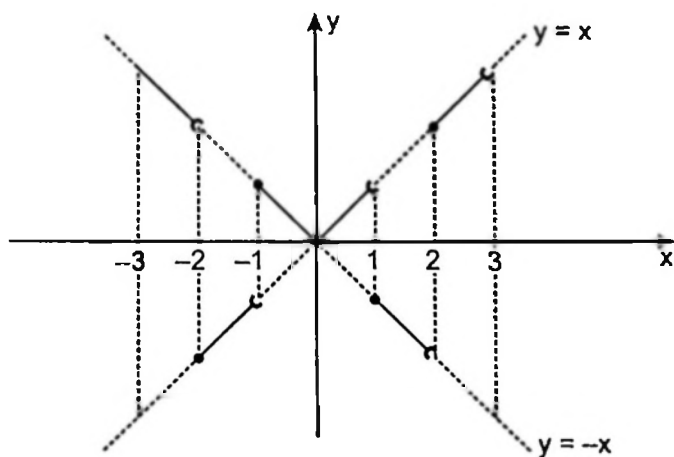
6.130)

$I(f) = [1; +\infty[$

6.131)

6.132) c) ±1

6.133)

6.134) Note que: $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

6.135)

6.136) Desenhe o gráfico de $y = [x]$ e faça uma reflexão em torno de Ox da parte do gráfico que está abaixo de Ox.

6.137)

6.138)

6.139)

6.140) a) [3; 4[b) ∅

6.141) ℕ

6.142) todos os inteiros são pontos fixos

Capitulo 7

7.5) a) $V = \{-5; 4\}$ b) $V = \{0; -7\}$ c) $V = \{4\}$

7.6) a) $V = \{5; -2\}$
b) $V = \{0; 4\}$
c) $V = \{4; 8\}$
d) $V = \{3\}$

7.7) $V = \left\{\frac{9}{35}; \frac{2}{15}\right\}$

7.8) a) $V = \{3\}$ b) $V = \{1\}$

7.9) a) $V = \{5; -5\}$ b) $V = \{0; 1; 3\}$

7.15) a) $V =]4; +\infty[$
b) $V = [4; +\infty[$
c) $V = \varnothing$
d) $V = \{4\}$
e) $V =]4; +\infty[$
f) $V = [4; +\infty[$
g) $V =]-\infty; 4[$
h) $V =]-\infty; 4]$

7.16) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 11\}$
b) $V = \left]-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right[$

7.17) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2 \vee 3 \leq x \leq 5\}$
b) $V = [-3; 6]$
c) $V = [-3; 6[$

7.18) a) $V =]40; +\infty[$
b) $V = \left]-\infty; \frac{134}{7}\right[$
c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > \frac{5}{6}\right\}$

7.20) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \vee 7 \leq x < 8\}$
b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 0 \vee 1 \leq x < 3\}$

7.21) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{41}}{2} \leq x < 4\right\}$
b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

7.23) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{9}{2}\right\}$
b) $V = \varnothing$
c) $V =]8; +\infty[$
d) $V = [8; +\infty[$

7.26) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \vee x \geq 4\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \vee x > 4\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 6\}$

7.27) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{-9 - \sqrt{89}}{4} \vee x > 2\right\}$

b) $V = \left[-\dfrac{19}{6}; 5\right[$

7.32) a) $x = \dfrac{17}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$

b) $x = 5$ e $y = 4$

c) $x = 6$ e $y = 1$

d) $x = \dfrac{15}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$

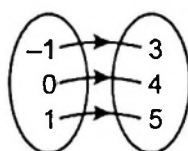
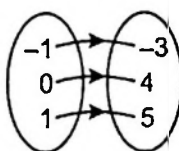
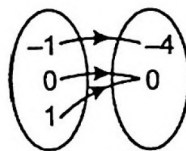
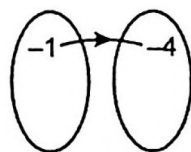
e) não é possível

f) não é possível

7.33) $a = 2$ e $b = 3$

Capítulo 8

8.3) $f + g = \{(1; 4), (2; 6), (3; 4)\}$
$f - g = \{(1; 0), (2; 0), (3; 4)\}$
$f \cdot g = \{(1; 4), (2; 9), (3; 0)\}$
$\dfrac{f}{g} = (1; 1), (2; 1)\}$

8.4)

Adotamos por definição CD = $\mathbb{R}$.

8.5) $D(f + g) = \mathbb{R}$ — $(f + g)(x) = x + x^2 - 1$

$D(f - g) = \mathbb{R}$ — $(f - g)(x) = x - x^2 - 1$

$D(f \cdot g) = \mathbb{R}$ — $(f \cdot g)(x) = x(x^2 - 1)$

$D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{1; -1\}$ — $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

8.6) a) $D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = \mathbb{R}$; $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - [0; 1[$

$(f + g) = |x| + [x]$; $(f - g)(x) = |x| - [x]$;

$(f \cdot g) = |x| \cdot [x]$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{[x]}$

b)

8.17) {(1; 4)}

8.18) a) 4   c) 1
b) 19   d) –11

8.19) a) $\mathbb{R}$ d) $(x - 1)^2 + 1$
b) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R}$ f) x^2

8.20) a) $\mathbb{R}$ d) $|x|$
b) $\mathbb{R}_+$ e) $\mathbb{R}_+$
c) $\mathbb{R}$ f) $(\sqrt{x})^2$

8.21) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x > 1\}$ d) $|x|$
b) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$ f) $|x|$

8.22) a) $\mathbb{R}^*$ d) $\frac{x}{2x - 1}$
b) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e) $\mathbb{R} - \{-1\}$
c) $\mathbb{R}^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $-x$

8.23) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ d) $\frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

b) $\mathbb{R}^*$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

e) $]0; 1]$

f) $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

8.24) a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}^*$

c) $\mathbb{R}^*$

d) x^{-4}

e) $\mathbb{R}^*$

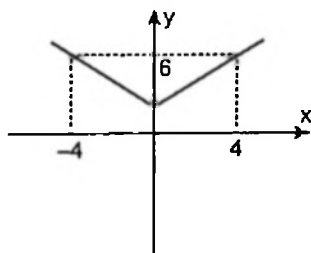
f) x^{-4}

8.25) a) 0; 8; –1; 12

b) $g[f(x)] = \begin{cases} -2x, \text{ se } x \leq 1 \\ 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ $\quad f[g(x)] = \begin{cases} -2x, \ x \leq \frac{1}{2} \\ 2x, \ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

8.26) $\frac{x+3}{2}$

8.27) a) $|x| + 2$

b)

c) $]-4; 4[$

8.28) $(a - 1)\,d = b(c - 1)$

8.29) $\frac{1-x}{1+x}$

8.30) $-\frac{1}{4}$

8.31) a) 3 ou –1

b) $f(3x + 4) \neq 3f(x) + 4$

8.32) 52

8.33) 1

8.34) a) 3

b) $-2x + 3$

c) $2x + 5$

e) $\frac{3x+2}{x}$

f) $\frac{1}{2x+3}$

g) 2

d) $2x + 4$

8.35) $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

8.36) a) 11; 10; 12

b) $\begin{cases} 2x+1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ 2x+3, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$

8.37) a) par
b) ímpar
c) par

8.38) zero

8.41) Seja $x \in E$; façamos $f(x) = y$, $g(y) = z$ e $h(z) = w$

$[(h \circ g) \circ f]\,(x) = (h \circ g)\,(f(x)) = (h \circ g)\,(y) = h[g(y)] = h(z) = w$

$[h \circ (g \circ f)]\,(x) = h[(g \circ f)\,(x)] = h\,\{g\,[f(x)]\,\} = h\,[g(y)] = h(z) = w$

apítulo 9

9.8) a) não se classifica
b) sobre e não in
c) in e não sobre

9.9) a) não se classifica
b) in e não sobre
c) bijetora

9.10) a) não se classifica
b) sobre e não in
c) bijetora
d) não se classifica
e) sobre e não in
f) sobre e não in

9.11) $y = \frac{3}{4}$ não é imagem de nenhum x.

9.12) Não é injetora: 0 é imagem de infinitos valores de x. f é sobrejetora, pois para todo $y \in CD(f)$ existe $x = 2y$, tal que $f(x) = y$.

9.13) $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{17}{4}$ (não é injetora); $f(1) = 2$

9.14) não existe $x \mid f(x) = 1$; existem 2 valores de x, tal que $f(x) = -1$.

9.15) $\mathbb{R}$.

9.16) 3

9.17) $p \geq q$, $p \leq q$, $p = q$

9.18) 6

9.19) 6

9.20) 6

9.21) Como g é sobrejetora, para todo $z \in E$ existe $y \in E \mid g(y) = z$; como f é sobrejetora, para todo $y \in E$ existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$.
Logo, para todo $z \in E$ existe $x \in E$, tal que: $z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.

9.27) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

9.28) ($a = 1$ e $b = 0$) ou ($a = -1$ e b qualquer)

9.29) a) $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$; $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

b) $f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$; $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$

c) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

d) $f^{-1} : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \to \mathbb{R}_+$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

e) $f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}^*$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

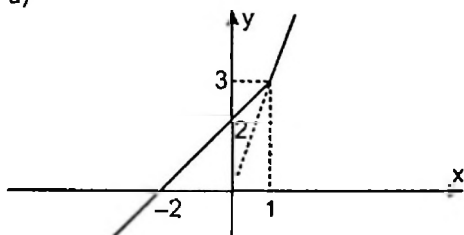
9.30) a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

b) x e x

9.31) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, \text{ se } x \geq -1 \\ x+1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

9.33) $m = 2$

9.34) $f^{-1}(x) = f(x)$; para que f seja bijetora.

9.35) a)

b) Retas encontram o gráfico de f em um e somente um ponto, portanto a função é bijetora

c) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{2x}{3} - 1 - \frac{1}{3} \cdot |x - 3|$

Parte I

I.1) $V = \{(0; -1); (-1; -4)\}$

I.2)

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim r$	$\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim r)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V

I.3) a) $\left[-\frac{49}{10}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

b) $[1; \pi[$

c) $\varnothing$

I.4) a) 22

b) 24

c) 35

d) 7

Parte II

II.1) a) $a < -\frac{13}{3}$

II.2) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 0 \text{ ou } 5 < x \leq 7\}$

b) $\varnothing$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 0 \text{ ou } \sqrt{2} \leq x \leq 7\}$

II.3) $S = \{0\}$

II.4) $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

II.5) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > -1\}$

II.6) $V = \left\{\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{-1}{3}\right)\right\}$

II.7) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

II.8) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \vee 1 < x < 2\}$

II.9) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee -1 \leq x < \frac{-1}{2} \vee \frac{1}{2} < x \leq 1 \vee x \geq 2\right\}$

II.10) 4

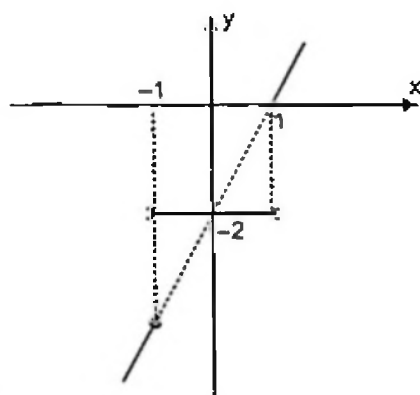
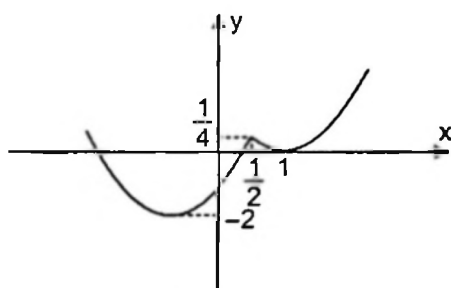
Parte III

III.1) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

III.2) $C_0 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \,\Re\, 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x - 0$ é divisível por 3$\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6\}$

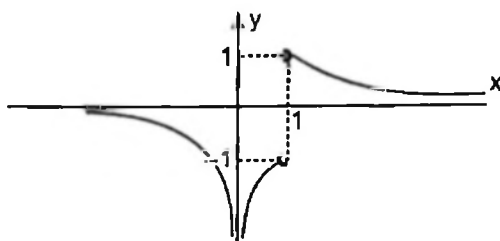
III.3) a) $\Re = \{(9; 1), (6; 2), (3; 3)\}$
b) $D(\Re) = \{9; 6; 3\}$; $I(\Re) = \{1; 2; 3\}$
c) $\Re^{-1} = \{(1; 9), (2; 6), (3; 3)\}$

III.4) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $-1 \leq x < 0\}$
b) $]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 4[$

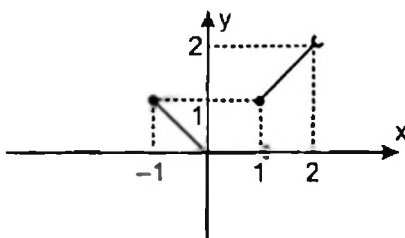
III.5)

III.6)

III.7) $a = \frac{3}{4}$ e $x_0 = -\frac{1}{12}$

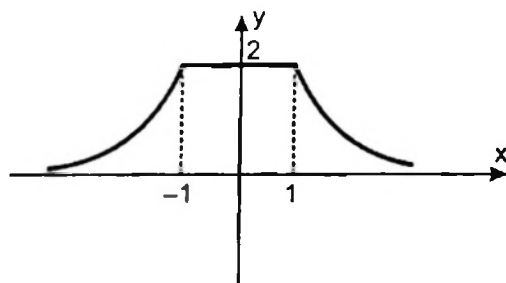
III.8) $-\frac{171}{49} < m < -3$

III.9) $f(1) = -1$ e $f(2) = 1$ (veja ex. 6.112)
$m < 0$: $1 < x_1 < 2 < x_2$
$m > 0$: $x_1 < 1 < x_2 < 2$

III.10)

III.11) $\frac{\ell}{2}$

III.12) $p = 0$ ou ($p > 0$ e $-2 \leq a < 0$)

III.13)

III.14) Note que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$; faça $x = 1, 2, 3, \ldots, 100$ e some: $\frac{100}{101}$

III.15)

I(f) =]0; 2]

Parte IV

IV.1) $S = \{4\}$

IV.2) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

IV.3) $m < 0$: $S = \varnothing$
$m = 0$: $S = \mathbb{R}_*$
$m > 0$: $S = \left\{-\frac{m}{3}\right\}$

IV.4) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leq x < \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$

IV.5) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} < x < 3\right\}$

IV.6) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$

IV.7) Se $a < b < a\sqrt{2}$: 2 raizes
Se $b < a$: 1 raiz

IV.8) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

IV.9) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 81 \text{ ou } x \geq 1296\}$

IV.10) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

IV.11) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

IV.12) 8; $\sqrt{5} - 1$; $\sqrt{5} + 1$

IV.14) $\dfrac{s+d}{2} = \sqrt{a}$ e $\dfrac{s-d}{2} = \sqrt{b}$ e $sd = a - b$; se s é racional, então $d = \dfrac{a-b}{s}$ é racional e $\sqrt{a} = \dfrac{s+d}{2}$ é racional: absurdo! Etc.

$A^2 - B$ deve ser um quadrado perfeito; $3\sqrt{3} + 2$.

Parte V

V.3) Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$; como $g \circ f = I_E$ temos:

$x_1 = I_E(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = (g \circ f)(x_2) = I_E(x_2) = x_2$

o que mostra que f é injetora.

Se x é um elemento qualquer de E, então $y = f(x)$ pertence a F e temos:

$x = I_E(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$ e daí g é sobrejetora.

V.4) Seja f uma função bijetora; então f^{-1} é uma função de F em E e o ex. 9.26 mostra que se escolhermos $g = f^{-1}$ tem-se: $g \circ f = I_E$ e $f \circ g = I_E$.

Reciprocamente, suponhamos que a função g satisfaça: $g \circ f = I_E$ e $f \circ g =$ e mostremos que f é bijetora. Se $g \circ f = I_E$, então f é injetora (ex. V.3) e $f \circ g = I_E$, então f é sobrejetora (ex. V.3).

V.5) Do exercício anterior, basta mostrar que:

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_G$

e: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_E$

Temos: $f^{-1} \circ f = I_E$, $f \circ f^{-1} = I_F$, $g^{-1} \circ g = I_F$ e $g \circ g^{-1} = I_G$.

Então: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \underbrace{[(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g] \circ f}_{\text{comutatividade (ex. 8.41)}} =$

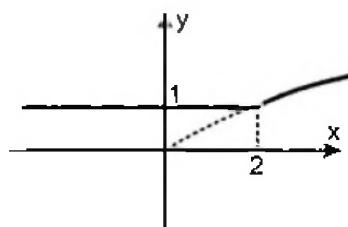
$= [f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)] \circ f = [f^{-1} \circ I_F] \circ f = f^{-1} \circ f = I_E$ etc.

V.6) a) 0 b) nk

V.7) $f(0) = 1$

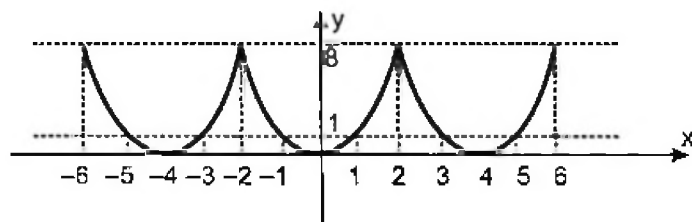
V.8) 1; −1; 0

V.9) a) $\mathbb{R}$

b)

c) $I(f) = [1; +\infty[$

V.10) $g(x) = c$

V.11) a) $f(x) = |x^3|$

b)

c) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é ímpar$\}$

d) $[0; 8]$

A Editora VestSeller tem o prazer de reeditar a Coleção Noções de Matemática, uma obra prima composta por 8 volumes, que trata de todo o conteúdo da Matemática do Ensino Médio de forma primorosa.

Cada volume contém teoria completa e detalhada, com excelente profundidade, incluindo demonstrações de propriedades e de teoremas relevantes para o sólido aprendizado do estudante.

Adicionalmente, a grande quantidade de exercícios resolvidos e propostos, em cada capítulo, fornece ao leitor os meios necessários para uma excelente fixação do conteúdo. Todas as respostas são fornecidas ao final de cada livro.

Os seguintes volumes integram essa coleção:

Volume 1: Conjuntos e Funções.
Volume 2: Progressões e Logaritmos.
Volume 3: Trigonometria.
Volume 4: Combinatória, Matrizes e Determinantes.
Volume 5: Geometria Plana e Espacial.
Volume 6: Geometria Analítica.
Volume 7: Números Complexos e Polinômios.
Volume 8: Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral.

Essa coleção é indicada para professores e estudantes de ensino médio, em especial para aqueles que buscam um aprendizado de nível médio a alto, compatível com os exames dos vestibulares mais concorridos do Brasil, dentre eles as escolas militares IME e ITA.

www.vestseller.com.br

ISBN 978856065304-1